

**ВЫСШЕЕ
ОБРАЗОВАНИЕ**

И. Н. Попова

Ответственный редактор —
В. В. Ковалев

АНАЛИЗ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Учебник



Курс с онлайн-
оцениванием

УМО ВО
РЕКОМЕНДУЕТ

 **Юрайт**
ИЗДАТЕЛЬСТВО

И. Н. Попова

АНАЛИЗ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

УЧЕБНИК ДЛЯ ВУЗОВ

Ответственный редактор — **В. В. Ковалев**

*Рекомендовано Учебно-методическим отделом высшего образования
в качестве учебника для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по экономическим, математическим направлениям*

**Книга доступна на образовательной платформе «Юрайт» urait.ru,
а также в мобильном приложении «Юрайт.Библиотека»**

Москва ■ Юрайт ■ 2024

УДК 519.246.8(075.8)
ББК 60.6я73
П58

Автор:

Ковалев Валерий Викторович — доктор экономических наук, профессор.

Рецензент:

Максимова Т. Г. — доктор экономических наук, профессор факультета технологического менеджмента и инноваций Санкт-Петербургского национального исследовательского университета информационных технологий, механики и оптики.

Попова, И. Н.

П58 Анализ временных рядов : учебник для вузов / И. Н. Попова ; ответственный редактор В. В. Ковалев. — Москва : Издательство Юрайт, 2024. — 74 с. — (Высшее образование). — Текст : непосредственный.

ISBN 978-5-534-18394-8

Данный курс является модулем более общего курса «Теория статистики с элементами эконометрики», подготовленного преподавателями Санкт-Петербургского государственного университета (СПбГУ). Теория статистики является одной из важнейших дисциплин в университетских программах подготовки экономистов.

Анализ временных рядов рассматривается как отдельный метод математической статистики, инструментарий прикладного статистического анализа, с очевидностью приложимый к экономическим исследованиям.

Теоретическая часть дополнена вопросами для обсуждения и заданиями для самостоятельной работы.

Соответствует актуальным требованиям федерального государственного образовательного стандарта высшего образования.

Для студентов и преподавателей экономических вузов, а также специалистов, работающих в области экономики, статистики, аудита.

УДК 519.246.8(075.8)
ББК 60.6я73

Разыскиваем правообладателей и наследников Ковалева В. В.: <https://www.urait.ru/inform@>
Пожалуйста, обратитесь в Отдел договорной работы: +7 (495) 744-00-12; e-mail: expert@urait.ru
Все права защищены. Никакая часть данной книги не может быть воспроизведена в какой бы то ни было форме без письменного разрешения владельцев авторских прав.

Оглавление

Введение.....	5
Тема 1. Понятие о динамике. Представление временных рядов... 7	7
1.1. Построение временных рядов.....	7
1.2. Классификация временных рядов	8
1.3. Графическое представление динамики.....	10
1.4. Сопоставимость уровней ряда.....	13
1.5. Взаимосвязи временных рядов.....	15
Тема 2. Аналитические показатели изменения уровней ряда.... 16	16
2.1. База сравнения для оценки временных изменений	16
2.2. Абсолютное изменение.....	17
2.3. Относительное изменение.....	19
2.4. Вспомогательные показатели для оценки временных изменений	20
2.5. Средние показатели в рядах динамики	23
Тема 3. Периодизация динамики. Методы выявления основной тенденции динамики..... 25	25
3.1. Понятие периодизации.....	25
3.2. Механические методы выявления основной тенденции	26
3.3. Аналитическое выравнивание	29
Тема 4. Основные трендовые модели 31	31
4.1. Линейный тренд.....	31
4.2. Параболический тренд	34
4.3. Показательная функция	35
4.4. Гиперболический тренд.....	37
Тема 5. Устойчивость временного ряда 39	39
5.1. Измерение устойчивости уровней ряда	39
5.2. Измерение устойчивости тенденции динамики.....	40
Тема 6. Сезонность и ее измерение 44	44
6.1. Выявление наличия и измерение сезонности	44
6.2. Аналитическое выравнивание сезонных колебаний с помощью ряда Фурье.....	48
6.3. Оценка сезонных колебаний за ряд лет.....	51
Тема 7. Прогнозирование на основе временных рядов..... 55	55
7.1. Упрощенные приемы прогнозирования.....	55
7.2. Прогнозирование на основе экстраполяции тренда	56
7.3. Прогнозирование с учетом сезонной составляющей.....	59

Выводы.....	61
Вопросы и задания для обсуждения	62
Задания для самостоятельной работы	63
Приложение	
Используемые обозначения и основные формулы	68
Список литературы.....	72

Введение

Данный курс является модулем более общего курса «Теория статистики с элементами эконометрики», подготовленного преподавателями Санкт-Петербургского государственного университета (СПбГУ). Теория статистики является одной из важнейших дисциплин в университетских программах подготовки экономистов. Причем речь не идет лишь о тех студентах, которые планируют по окончании вуза связать свою профессиональную карьеру с органами статистики.

Умением работать с массивами данных, формировать соответствующие совокупности и выборки, выявлять присущие им взаимосвязи и тенденции, формулировать и количественно подтверждать устойчивость установленных связей в той или иной степени должны владеть, по сути, все выпускники экономических программ любого уровня. Данное утверждение становится особенно очевидным, если вспомнить о созданных в последние десятилетия мощных информационных базах, доступных многим пользователям и содержащих потенциально полезную информацию о различных экономических субъектах. Существуют специализированные пакеты статистической обработки данных, которыми можно формально воспользоваться, однако эффективность их применения будет гораздо выше, если пользователь понимает суть используемых в них технологий, алгоритмов, критериев, показателей. И здесь на помощь приходит статистика, понимаемая как совокупность знаний, связанных с изучением количественной стороны массовых общественных явлений.

Анализ временных рядов рассматривается как отдельный метод математической статистики, инструментарий прикладного статистического анализа, с очевидностью приложимый к экономическим исследованиям.

Теоретическая часть дополнена вопросами для обсуждения и заданиями для самостоятельной работы. В приложении отмечены используемые в тексте обозначения и основные формулы.

В результате изучения курса студент должен:

знать

- компоненты и виды динамических рядов;
- абсолютные и относительные показатели изменений уровней ряда;
- методы анализа рядов динамики;

уметь

- представлять графически временные изменения;
- интерпретировать значения характеристик динамического ряда;
- выявлять основную тенденцию динамики и влияние сезонной составляющей;

владеть

- приемами расчета показателей изменения уровней ряда, в том числе средних;
- методами анализа временных изменений;
- навыками прогнозирования на основе динамических рядов.

Отметим, что овладение представленным материалом несомненно потребует от читателя определенных интеллектуальных и временных усилий, а также знаний в смежных областях экономики.

Со всеми замечаниями и пожеланиями просим обращаться к авторам курса на кафедру статистики, учета и аудита СПбГУ (тел.: +7 812 272-07-85, e-mail: buu-stat@rambler.ru). Информация о кафедре, а также научных интересах и публикациях ее сотрудников представлена на сайте экономического факультета СПбГУ www.econ.spbu.ru.

Тема 1

ПОНЯТИЕ О ДИНАМИКЕ. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

1.1. Построение временных рядов

Трудно привести пример явления или процесса, которое бы не изменялось с течением времени; может быть лишь в какие-то короткие промежутки времени есть незыблемые, неизменные вещи. Как правило, меняется все, и различия заключаются лишь в том, с какой скоростью происходят изменения. Первые временные изменения, которые замечает человек, наверное, природные. В течение дня меняются освещенность, температура воздуха, атмосферное давление, в течение месяца — количество выпавших осадков, стадии роста растений, в течение года — средняя температура воздуха, количество взошедших и умерших растений и т.д. Подобные процессы можно наблюдать и в общественных явлениях, характеризующихся различными показателями: количество действующих предприятий или детских садов, численность населения или производительность труда по отрасли и др. При изучении общественных явлений неизбежно возникает необходимость анализа их изменений во времени. В зависимости от контекста исследования может быть важен лишь последний небольшой отрезок времени, а может быть важна длительная ретроспектива либо отдельный период в прошлом.

Необратимость времени предопределяет подходы к изучению временных изменений: от прошлого к настоящему. При изучении того или иного явления, как правило, рассмотрение его осуществляется в соответствии с течением времени, т.е. используются данные в хронологической последовательности. Именно поэтому наиболее удобной формой изучения временных изменений является построение данных в виде таблицы, где в одной колонке в хронологическом порядке указывается время, а во второй — соответствующие значения рассматриваемого показателя. Таким образом, образуется динамический или временной ряд (*time series*), где каждый момент или период времени характеризуется так называемым *уровнем ряда*. Уровни ряда, как правило, обозначаются через y_t ,

где подстрочные индексы означают номер уровня в данном ряду от первого (начального) до последнего (конечного). Время (конкретный момент или интервал) традиционно обозначают через t_i .

Длительность временного ряда предопределяется наличием данных и целью исследования. Предпочтение отдается длительным рядам, поскольку рассчитанные по ним показатели более устойчивы. Однако в один динамический ряд обычно включаются значения, отражающие определенный этап развития данного явления. Например, изучать численность населения можно за 100 лет. При этом, если в этом столетии происходили войны, то для отражения временных изменений можно использовать динамический ряд длительностью в сто уровней, а если задача состоит в изучении закономерностей воспроизводства населения, то лучше разделить этот динамический ряд на отдельные отрезки, отражающие воспроизводство населения на определенном этапе развития (военный, послевоенный, мирный периоды). В качестве временного параметра могут выступать различные временные промежутки: годы, кварталы, месяцы, дни, часы и др. Выбор периодичности времени может быть предопределен содержанием самого анализируемого показателя (движение товаров на складе фиксируется посуточно, а урожайность культур — раз в год) или наличием исходных данных.

1.2. Классификация временных рядов

Временные ряды могут быть сгруппированы по различным признакам. Прежде всего выделяют два вида динамических рядов в зависимости от способа задания времени. Если указывается момент времени, то значение показателя характеризует явление в отдельный строго определенный момент времени. Если указывается временной интервал, то значение показателя отражает всю совокупность изменений этого явления за данный промежуток времени. В первом случае говорят о **моментных** динамических рядах, во втором — об **интервальных**.

В качестве момента времени, как правило, выступает конкретное число, дата. Например, численность населения на первое января каждого года. Но может быть и более детальная динамика, например на начало смены, т.е. указывается не только дата, но и время. Следует отметить, что в моментных динамических рядах между уровнями ряда остаются временные промежутки, в которых значения изучаемого показателя остаются неизвестными. Следовательно, чем чаще момент учета, тем подробнее отражается развитие изучаемого явления. Каждый уровень моментного динамического ряда отражает состояние чего-либо (населения, запасов на складе,

численности студентов и т.п.). Суммирование уровней моментного ряда приводит к повторному счету.

Если в интервальном ряду представлены данные за непрерывный промежуток времени, например за каждый из анализируемых 10 лет, то между ними промежутков нет, и можно представить всю картину изменения явления за этот 10-летний временной промежуток. Как правило, величина уровня интервального ряда зависит от величины задаваемого времени (годовые, месячные, недельные данные). Сумма уровней интервального временного ряда имеет реальное содержательное значение.

Показатели, характеризующие то или иное явление, не всегда могут быть представлены за равные промежутки времени, а иногда это и не требуется. По расстоянию между уровнями ряда временные ряды подразделяются на ряды с **равноотстоящими** и **неравноотстоящими уровнями** по времени. Чаще для последовательного изучения временных изменений используют динамические ряды с равноотстоящими уровнями (ежегодные, ежемесячные данные). Ряды с неравноотстоящими уровнями могут использоваться при недостатке исходной информации, а также в случаях, когда необходимо дать сравнение со значимыми для этого явлениями уровнями (например, со значениями показателей в советский период или дореформенный период).

В зависимости от вида показателей уровней ряда выделяют динамические ряды **абсолютных, относительных и средних величин**. Соответственно при анализе интервальных динамических рядов абсолютных величин в случае непрерывных данных суммирование уровней ряда дает представление о величине изучаемого показателя за более длительный период времени. Например, при анализе ежегодных данных о добыче нефти суммирование уровней, скажем, за пять лет, дает характеристику объема добытой нефти за это пятилетие. Среди динамических рядов абсолютных величин иногда выделяют ряды, характеризующие изменение численности единиц какой-либо совокупности (численности населения региона, численности сотрудников фирмы, поголовья скота фермерского хозяйства). Анализ динамики относительных и средних показателей позволяет сравнивать динамику этих показателей по разным объектам или динамику разных показателей. Например, можно сравнивать динамику доли экспортированной нефти в общем объеме ее добычи в разных странах, или изменение среднедушевого денежного дохода населения в разных регионах страны за последнее десятилетие, или сопоставлять изменения средней заработной платы и производительности труда по предприятию.

Довольно часто первой характеристикой временного ряда служит его средний уровень. Определение средней в различных временных рядах имеет некоторые особенности. Рассмотрим расчет

среднего уровня ряда в выделенных ранее различных временных рядах:

1) моментный динамический ряд с равноотстоящими уровнями — по формуле средней хронологической

$$\bar{y} = \frac{\frac{y_1}{2} + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}}{n-1},$$

где \bar{y} — средний уровень; y_1, \dots, y_n — уровни ряда; n — количество уровней ряда;

2) интервальный динамический ряд с равноотстоящими уровнями — по формуле средней арифметической простой

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n},$$

где \bar{y} — средний уровень; y_i — i -й уровень ряда; n — количество уровней ряда;

3) динамический ряд с неравноотстоящими уровнями — по формуле средней арифметической взвешенной

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i t_i}{\sum t_i},$$

где \bar{y} — средний уровень; y_i — уровни ряда; t_i — промежуток времени, в течение которого уровень ряда оставался неизменным.

Для приблизительной оценки среднего уровня динамического ряда может использоваться простая средняя. Однако для более точной и корректной оценки следует применять соответствующую формулу расчета средней величины.

1.3. Графическое представление динамики

Довольно часто изучение динамики какого-либо явления начинается с построения или изучения графического изображения одного или нескольких временных рядов. Наиболее распространенным видом используемых графиков для этих целей является линейная диаграмма. Она строится в прямоугольной системе координат, где по оси абсцисс откладываются периоды или моменты времени, по оси ординат — уровни ряда динамики. Соединенные точки, характеризующие значения показателя в определенный момент или период времени, представляют собой линейную диаграмму. Крайне важным моментом при построении графика динамического ряда является масштаб. Если для изображения на

графике по оси ординат выделяется узкий участок оси, то график будет представлять очень незначительные изменения показателя за изучаемый период, если увеличить диапазон на оси, то временные изменения будут выглядеть более значительно. На рис. 1.1 и 1.2 представлена динамика рождаемости в РФ с 2001 по 2011 г. На рис. 1.1 на оси ординат значения коэффициента рождаемости представлены от 0 до 14 промилле, а на рис. 1.2 – от 4 до 14 промилле. В результате на первом рисунке изменения рождаемости выглядят менее значительными, чем на втором, хотя оба графика являются отражением одного временного ряда.

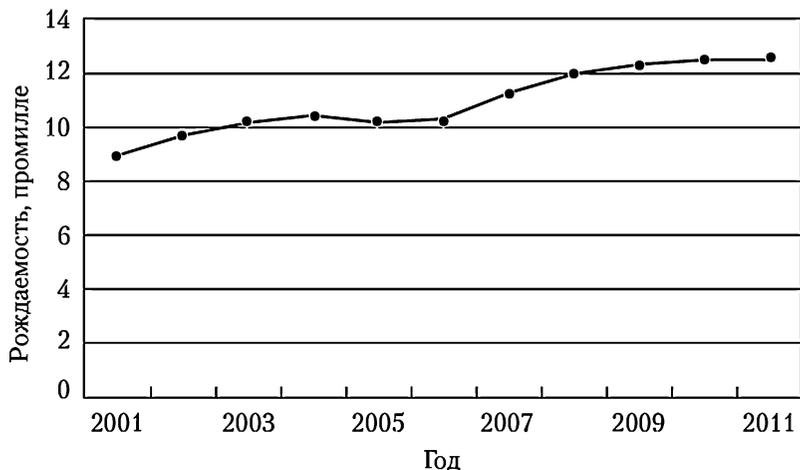


Рис. 1.1. Число родившихся на 1000 человек населения по РФ

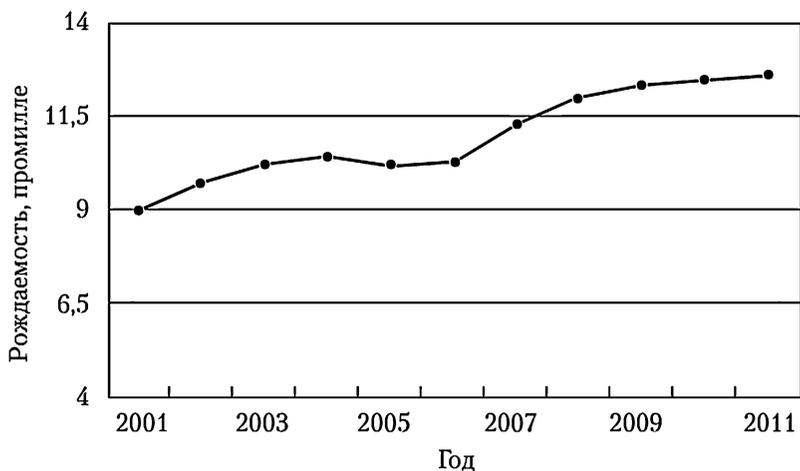


Рис. 1.2. Число родившихся на 1000 человек населения по РФ

Для сравнения динамики нескольких показателей в одной системе координат может применяться соответствующее количество кривых. На рис. 1.3 представлены две составляющие естественного движения населения РФ: рождаемость и смертность. График наглядно демонстрирует обратную динамику этих показателей: рождаемость растет, а смертность снижается. В 2011 г. эти показатели приближались друг к другу.

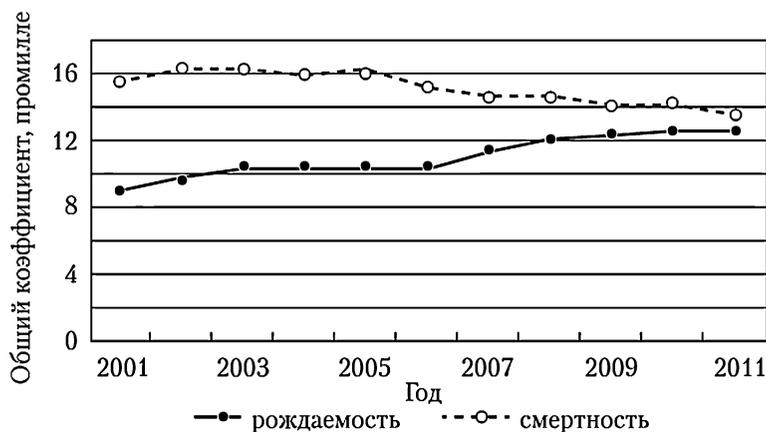


Рис. 1.3. Число родившихся и умерших на 1000 человек населения по РФ

При необходимости могут использоваться две или три шкалы одновременно, если отражается динамика двух или нескольких признаков, имеющих разные единицы измерения. Однако на одном графике рекомендуется применять не более трех-четырех кривых.

Кроме линейной диаграммы при анализе динамических рядов часто используют столбиковые, фигурные, радиальные диаграммы. Столбиковые диаграммы строятся на горизонтальной оси, на которой откладываются промежутки или моменты времени. Вертикальная ось может присутствовать и отражать значения уровней ряда либо нет, тогда значения показателей указываются на (над) соответствующими столбиками. По высоте столбиков можно судить о динамике анализируемого показателя. На рис. 1.4 представлена динамика показателя ожидаемой продолжительности жизни при рождении по населению РФ. Одновременно можно проследить изменения значений этого показателя за 12 лет и сравнить их по двум категориям населения: мужчинам и женщинам. Можно сказать, что наблюдается едва заметное направление к увеличению ожидаемой продолжительности жизни и у мужчин, и у женщин. При этом разница в значениях данного показателя у этих категорий населения весьма существенна и практически не меняется на

протяжении рассматриваемого периода времени: ожидаемая продолжительность жизни женщин на 11–13 лет больше, чем мужчин.

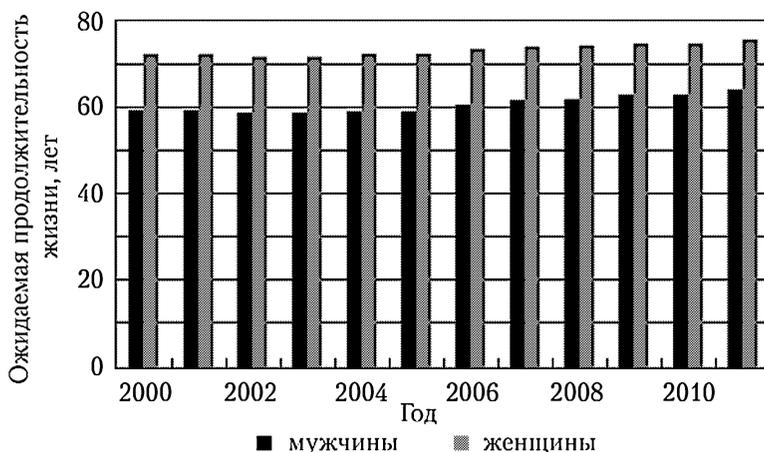


Рис. 1.4. Динамика ожидаемой продолжительности жизни при рождении

Фигурные диаграммы не дают точного отображения, их используют для агитационных, пропагандистских целей, так как они очень наглядны. В отличие от столбиковой диаграммы в основе графика не столбики, а какие-либо фигуры, образы, размер которых отражает размер показателей. Радиальные диаграммы применяют для изображения сезонных явлений. Они будут рассмотрены в подтеме 6.1.

1.4. Сопоставимость уровней ряда

Сопоставимость отдельных уровней временного ряда крайне важна для корректного наблюдения изменений во времени. Она означает, что включенные в динамический ряд значения показателей должны быть рассчитаны по одной базе, по одной методике, за одинаковые промежутки времени и т.п. Выделяют сопоставимость уровней по кругу охватываемых элементов. Чаще всего это связано с изменением границ территорий, по которым производится анализ. Например, рождаемость в СССР и рождаемость в РФ, производительность труда рабочих и производительность труда промышленно-производственного персонала. Иногда под охватом элементов понимается размер или состав совокупности, характеризуемой этими показателями, например смертность всего населения или смертность мужского населения. Также важна

сопоставимость методики расчета показателей. Если во временном ряду представлены расчетные показатели, то необходимо обеспечить унификацию методики, по которой они рассчитывались. Например, долгое время в статистике сельского хозяйства урожайность зерновых рассчитывалась как соотношение валового сбора зерна и размера посевных площадей. Теперь урожайность определяют соотношением валового сбора с размером убранных площадей. В том и другом случае имеется урожайность зерновых, но включение в один временной ряд таких значений некорректно.

Следует внимательно оценивать влияние изменившихся обстоятельств на величину изучаемого показателя. Например, если изменились административно-территориальные границы двух районов включением какого-либо сельского населенного пункта из одного района в другой, то это скажется на многих показателях по этим двум районам. В то же время, если исследованию подвергались только города или городское население, то их сопоставимость не изменилась.

При повышенных требованиях к сопоставимости внимание уделяется и сопоставимости промежутков времени. Например, при анализе ежемесячных данных может быть важным различие в длительности месяцев (28, 30, 31), если изучается общий объем произведенной продукции.

Если в результате предварительного анализа выявлена несопоставимость данных, то применяются дополнительные расчеты, чтобы добиться сопоставимости. Наиболее распространенным приемом является *смыкание рядов динамики*. В случае наличия двух динамических рядов, показатели которых, скажем, рассчитаны по разным методикам, можно использовать смыкание. Для его осуществления важно, чтобы хотя бы за один период были известны значения по обоим методикам расчета. Тогда рассчитывается соотношение между уровнями двух рядов за один и тот же период, затем с помощью полученного коэффициента восстанавливают недостающие значения динамического ряда. Широко используемым является прием *приведения рядов к одному основанию*. Если необходимо сравнить стоимостные показатели за несколько лет по разным странам, то в качестве основания выбираются показатели одного года, они принимаются за 100%, а все остальные значения рассчитываются относительно них. Это позволяет без пересчета национальных валют проанализировать изменения данного показателя в разных странах.

В конечном счете при построении временных рядов следует тщательно исследовать содержательную часть показателей, проверять их сопоставимость, стремиться к однокачественности уровней ряда.

1.5. Взаимосвязи временных рядов

Изучение отдельного временного ряда, безусловно, может представлять интерес. Однако в силу того, что одно явление может быть описано несколькими показателями, а многие явления взаимосвязаны, одновременный анализ нескольких временных рядов может существенно увеличить результативность такого анализа, например проследить изменение во времени номинальной и реальной заработной платы по региону или производительности труда и заработной платы на предприятии. В результате такого анализа можно не только охарактеризовать изменения каждого отдельного показателя, но и выявить дополнительные закономерности в развитии явления. Если, например, скорость роста номинальной заработной платы превышает скорость роста реальной заработной платы, то это свидетельствует об увеличении инфляции в регионе. Если производительность труда на предприятии растет медленнее, чем заработная плата, то это тревожный сигнал для управленческого персонала данного предприятия.

В экономическом анализе хорошо сочетать изучение динамики абсолютных и относительных показателей, характеризующих одно и то же явление, для того, чтобы оценить роль экстенсивных и интенсивных факторов. Подобный подход может использоваться и при изучении социальных явлений. Например, увеличение числа детских дошкольных учреждений в регионе говорит о проводимой социальной политике. При этом может оказаться, что число детей на одно учреждение растет (если численность детей увеличивается быстрее количества мест в детских садах).

Существуют показатели, которые с разных сторон описывают один процесс, тогда рассмотрение их динамики, безусловно, следует проводить одновременно. Если задача заключается в изучении естественного воспроизводства населения в регионе, то необходимо исследование рождаемости и смертности. Их изменения за ряд последовательных временных периодов могут дать представление о ситуации за изучаемый период. В целом рассмотрение нескольких временных рядов существенно расширяет возможности анализа, при этом в некоторых случаях такой подход позволяет выявить закономерности, которые не могли быть обнаружены при изучении временных рядов отдельных показателей.

Тема 2

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ПОКАЗАТЕЛИ ИЗМЕНЕНИЯ УРОВНЕЙ РЯДА

2.1. База сравнения для оценки временных изменений

Анализ временных изменений после построения динамических рядов и их графического изображения для оценки направления и величины изменения признака основывается на сравнении уровней ряда между собой. В результате таких сравнений рассчитываются величины, которые принято называть **аналитическими показателями динамики**. Как известно, сравнение может быть либо абсолютное, либо относительное, т.е. показатели динамики рассчитываются вычитанием или делением уровней ряда. Традиционно используется два подхода к сопоставлению уровней. Первый подход заключается в сравнении каждого уровня с предыдущим, в результате чего получают **цепные показатели динамики**, второй — в сравнении каждого уровня с одним и тем же принятым за базу сравнения, получаемые показатели — **базисные**. При этом уровень текущего или более позднего периода, который сравнивается с другим уровнем, называется *сравниваемым уровнем*. Уровень того периода, с которым производится сравнение, называют базой сравнения или *базовым уровнем*. Выбор базы сравнения является важным моментом анализа. Как правило, в качестве базы выбирается первый уровень временного ряда. В этом случае рассчитываемые базисные показатели дают характеристику временных изменений за весь промежуток с начала анализируемого периода. Иногда базисным уровнем выступает логически и методологически обоснованный уровень более отдаленного периода, например относительно 1990 г. Такие показатели позволяют оценить изменения за разные временные промежутки, но относительно одной базы сравнения. Следует обратить внимание на то, что при анализе следует учитывать величину первого уровня ряда относительно остальных уровней. Если значение первого уровня меньше всех последующих, то все показатели динамики будут показывать рост уровней ряда, в то время как фактически это будет более или менее

стабильное состояние уровней ряда. Та же картина, только с обратным знаком, может наблюдаться, если первый уровень больше всех остальных. Поэтому еще на этапе построения динамического ряда следует тщательно обосновать выбор временного интервала с учетом величины первого уровня для включения в динамический ряд.

2.2. Абсолютное изменение

К аналитическим показателям динамики относится **абсолютное изменение** (скорость роста или снижения), которое показывает, на какую величину в абсолютном выражении сравниваемый уровень больше или меньше базисного. При увеличении значения уровня говорят об абсолютном приросте (положительное значение), при уменьшении — об абсолютном сокращении (отрицательное значение). Если уровни ряда не изменились, абсолютное изменение равно нулю. Абсолютное изменение имеет те же единицы измерения, что и анализируемый признак, что позволяет оценить степень изменения показателя в его единицах измерения: килограммах, штуках, литрах, рублях и т.п. Если за базу сравнения принимается предыдущий уровень, то получаем цепное абсолютное изменение:

$$\Delta_{\text{цепное}} = y_i - y_{i-1},$$

где y_i — сравниваемый уровень i -го периода; y_{i-1} — предыдущий уровень ($i - 1$)-го периода.

При сопоставлении всех уровней ряда с первым уровнем в ряду (или с уровнем, выбранным за базу по другим причинам) получают базисные абсолютные изменения:

$$\Delta_{\text{базисное}} = y_i - y_1,$$

где y_i — сравниваемый уровень i -го периода; y_1 — уровень первого (базисного) периода.

Между цепными и базисными абсолютными изменениями существует следующая зависимость: сумма цепных абсолютных изменений равна базисному абсолютному изменению последнего периода (с учетом знаков).

Ускорение — это величина, на которую сравниваемая скорость (абсолютное изменение) больше или меньше предыдущей скорости. Рассчитывается как разность соответствующих абсолютных изменений, применяется только к цепным показателям:

$$\Delta_{\Delta} = \Delta_i - \Delta_{i-1}.$$

Положительное значение этого показателя говорит об увеличении скорости, отрицательное — о замедлении скорости или об ускорении снижения.

Рассмотрим расчет этих показателей на примере ожидаемой продолжительности жизни при рождении для всего населения РФ (табл. 2.1).

Таблица 2.1

Динамика ожидаемой продолжительности жизни при рождении (число лет)

Год	y_i	$\Delta_{\text{цепное}} = y_i - y_{i-1}$	$\Delta_{\text{базисное}} = y_i - y_1$	$\Delta_{\Delta} = \Delta_i - \Delta_{i-1}$
2000	65,34	—	—	—
2001	65,23	-0,11	-0,11	—
2002	64,95	-0,28	-0,39	-0,17
2003	64,86	-0,09	-0,48	0,19
2004	65,31	0,45	-0,03	0,54
2005	65,37	0,06	0,03	-0,39
2006	66,69	1,32	1,35	1,26
2007	67,61	0,92	2,27	-0,40
2008	67,99	0,38	2,65	-0,54
2009	68,78	0,79	3,44	0,41
2010	68,94	0,16	3,60	-0,63
2011	69,83	0,89	4,49	0,73
Всего	800,9	4,49	—	—

Полученные отрицательные значения абсолютного изменения (цепные) говорят о снижении из года в год ожидаемой продолжительности жизни с 2000 по 2003 г. В 2004 г. показатель увеличился, но его значение не превысило начальный уровень ряда, поэтому базисное абсолютное изменение по-прежнему отрицательное. В дальнейшем все абсолютные изменения были положительными, т.е. происходило увеличение ожидаемой продолжительности жизни каждый год относительно предыдущего уровня и относительно начального уровня 2000 г. Наибольшие изменения произошли в 2006 г. (на 1,32 года) и в 2011 г. (на 0,89 года). В целом за период с 2000 по 2011 г. ожидаемая продолжительность жизни населения РФ увеличилась почти на 4,5 года. Рассчитанные в таблице ускорения с положительными и отрицательными знаками говорят о том, что не наблюдалось устойчивого ускорения или замедления анализируемого показателя. Самый большой скачок произошел в 2006 г., после чего два года происходил замедленный рост показателя. Затем знаки ускорения чередовались; это означает, что рост ожидаемой продолжительности жизни был

неравномерным. В табл. 2.1 можно наблюдать взаимосвязь между цепными и базисными показателями: например, сумма абсолютных сокращений 2001 и 2002 г. (-0,11 и -0,28) составляет абсолютное сокращение базисное 2002 г. (-0,39). Итоговая сумма абсолютных изменений за весь период с 2000 по 2011 г. равна 4,49 года, что является базисным абсолютным изменением последнего года.

2.3. Относительное изменение

Абсолютное значение, измеряемое в единицах измерения анализируемого показателя, не дает возможности сравнивать величину этих изменений различных показателей. Для этих целей используется относительное изменение или **коэффициент изменения** — величина, которую показывает, во сколько раз увеличился уровень по сравнению с базисным (коэффициент роста) или какую часть базисного уровня составляет сравниваемый уровень (коэффициент сокращения). В случае неизменности уровней коэффициент составляет единицу. Цепной и базисный коэффициенты рассчитывается соответственно по формулам:

$$k_{\text{цепной}} = \frac{y_i}{y_{i-1}};$$

$$k_{\text{базисный}} = \frac{y_i}{y_1},$$

где y_i — сравниваемый уровень i -го периода; y_{i-1} — предыдущий уровень ($i - 1$)-го периода; y_1 — уровень первого (базисного) периода.

Между цепными базисными коэффициентами существует взаимосвязь: произведение цепных коэффициентов изменения дает базисное изменение последнего периода. Расчет этих показателей приведен в нашем примере (см. табл. 2.2).

Относительное изменение часто выражается в процентах (коэффициент роста или сокращения умножается на 100), тогда говорят о темпе изменения (темпе роста или темпе сокращения).

$$T_{\text{цепное}} = \frac{y_i}{y_{i-1}} \cdot 100\%;$$

$$T_{\text{базисное}} = \frac{y_i}{y_1} \cdot 100\%.$$

Если уровень сравниваемого периода существенно больше базисного уровня, то следует использовать коэффициент роста

и выражать изменение в разгах, если произошло уменьшение уровня, то следует использовать темп сокращения, выраженный в процентах.

2.4. Вспомогательные показатели для оценки временных изменений

Для наглядной оценки изменений часто используется темп прироста, который является вспомогательным показателем, равным темпу изменения за вычетом ста процентов:

$$T_{\text{пр}} = k \cdot 100 - 100 = T - 100\%.$$

Темп прироста показывает, на сколько процентов уровень сравниваемого периода больше или меньше уровня базисного периода; соответственно он может быть положительной или отрицательной величиной. Данный индикатор может быть выражен и как отношение абсолютного изменения к уровню базисного периода, поэтому его иногда называют относительным приростом:

$$T_{\text{пр}} = \frac{\Delta}{y_1} \cdot 100\% = \frac{y_i - y_1}{y_1} \cdot 100\% = T - 100\%.$$

Если коэффициент роста является большой величиной, то темп прироста теряет свое значение и не применяется.

Кроме названных показателей при анализе динамики используется **абсолютное содержание (значение) одного процента прироста**. Оно показывает, какая величина показателя содержится в одном проценте прироста в его единицах измерения. Рассчитывается как отношение абсолютного изменения и темпа прироста:

$$A_{1\%} = \frac{\Delta}{T_{\text{пр}}}.$$

Данный показатель может быть преобразован:

$$A_{1\%} = \frac{\Delta}{T_{\text{пр}}} = \frac{y_i - y_{i-1}}{\frac{y_i - y_{i-1}}{y_{i-1}} \cdot 100\%} = \frac{y_{i-1}}{100\%}.$$

Следовательно, абсолютное содержание (значение) одного процента прироста составляет одну сотую от предыдущего уровня. Абсолютное содержание одного процента прироста базисного не меняется. Чаще анализируют, как меняется эта величина от периода к периоду. В нашем примере представлен расчет абсолютного содержания одного процента прироста на основе цепных показателей.

Вернемся к примеру динамики ожидаемой продолжительности жизни и рассчитаем перечисленные показатели (табл. 2.2).

Таблица 2.2

Динамика ожидаемой продолжительности жизни при рождении (число лет)

Год	y_i	Коэффициент изменения		Темп изменения, %		Темп прироста, %		Абсолютное содержание 1% прироста, лет
		цепной	базисный	цепной	базисный	цепной	базисный	
2000	65,34	—	—	—	—	—	—	—
2001	65,23	0,9983	0,9983	99,83	99,83	-0,17	-0,17	0,65
2002	64,95	0,9957	0,9940	99,57	99,40	-0,43	-0,60	0,65
2003	64,86	0,9986	0,9927	99,86	99,27	-0,14	-0,73	0,65
2004	65,31	1,0069	0,9995	100,69	99,95	0,69	-0,05	0,65
2005	65,37	1,0009	1,0005	100,09	100,05	0,09	0,05	0,65
2006	66,69	1,0202	1,0207	102,02	102,07	2,02	2,07	0,65
2007	67,61	1,0138	1,0347	101,38	103,47	1,38	3,47	0,67
2008	67,99	1,0056	1,0406	100,56	104,06	0,56	4,06	0,68
2009	68,78	1,0116	1,0526	101,16	105,26	1,16	5,26	0,68
2010	68,94	1,0023	1,0551	100,23	105,51	0,23	5,51	0,69
2011	69,83	1,0129	1,0687	101,29	106,87	1,29	6,87	0,69

Полученные показатели подтверждают те же временные изменения, которые были выявлены при анализе абсолютного изменения и ускорения. Значения коэффициентов изменения меньше единицы говорят о снижении показателя, больше единицы — о его увеличении. Одновременный расчет коэффициентов и темпов изменения, как правило, не производится, так как содержательно они идентичны. На основе темпов изменения вычисляют темпы прироста, их знаки указывают на направление изменения. То есть в 2002 г. (-0,43) произошло снижение ожидаемой продолжительности жизни по сравнению с 2001 г. на 0,43%, а в 2006 г. по сравнению с 2005 г. — увеличение на 2,02%. При анализе изменений чаще используют именно темпы прироста. В целом за период 2000–2011 гг. ожидаемая продолжительность жизни увеличилась в РФ на 6,87%. Связь между цепными и базисными показателями может быть легко обнаружена через произведение соответствующих цепных коэффициентов изменения, например произведение всех цепных коэффициентов дает 1,0687, что соответствует базис-

ному коэффициенту за весь период. При необходимости цепные показатели могут быть найдены из соотношения соответствующих базисных, например $1,0687 : 1,0551 = 1,0129$. Абсолютное содержание одного процента прироста, рассчитанное в последней колонке таблицы, имеет значения от 0,65 до 0,69, что означает увеличение наполненности одного процента прироста с 0,65 до 0,69 лет.

Для развернутой характеристики временных изменений рекомендуется перечисленные показатели использовать вместе: абсолютное изменение дает представление о произошедших изменениях в единицах измерения самого признака, а относительное позволяет сравнить степень этих изменений в сравнении с другим периодом времени или с другими признаками. Разная база сравнения (цепные и базисные) также расширяет аналитические возможности.

В нашем примере можно сказать, что с 2000 по 2011 г. ожидаемая продолжительность жизни в РФ как снижалась, так и увеличивалась, в целом за этот период показатель вырос на 4,5 года или на 6,87%. Самый большой рост произошел в 2006 г. — на 1,35 года или на 2,07% относительно 2000 г.

При изучении динамики двух показателей для сравнительной оценки изменений используют коэффициент опережения — соотношение коэффициентов (темпов) изменения за одинаковые промежутки времени по двум рядам. Рассмотрим динамику ожидаемой продолжительности жизни мужчин и женщин (см. рис. 1.4) и сравним ее (табл. 2.3).

Таблица 2.3

Динамика ожидаемой продолжительности жизни при рождении (число лет)

Год	Мужчины	Женщины	Цепной коэффициент изменения		Коэффициент опережения муж/жен.
			мужчины	женщины	
2000	59,03	72,26	—	—	—
2001	58,92	72,17	0,9981	0,9988	0,9994
2002	58,68	71,90	0,9959	0,9963	0,9997
2003	58,56	71,86	0,9980	0,9994	0,9985
2004	58,91	72,36	1,0060	1,0070	0,9990
2005	58,92	72,47	1,0002	1,0015	0,9987
2006	60,43	73,34	1,0256	1,0120	1,0135
2007	61,46	74,02	1,0170	1,0093	1,0077

Год	Мужчины	Женщины	Цепной коэффициент изменения		Коэффициент опережения муж/жен.
			мужчины	женщины	
2008	61,92	74,28	1,0075	1,0035	1,0040
2009	62,87	74,79	1,0153	1,0069	1,0084
2010	63,09	74,88	1,0035	1,0012	1,0023
2011	64,04	75,61	1,0151	1,0097	1,0053

До 2005 г. коэффициент опережения меньше единицы, затем он становится больше единицы. Это означает, что до этого момента ожидаемая продолжительность жизни мужчин росла медленнее, чем женщин, затем — быстрее. При этом следует обратить внимание на то, что отклонения от единицы и в ту, и в другую стороны очень невелики, следовательно, ожидаемая продолжительность жизни обоих полов изменяется почти синхронно. Лишь в 2006 г. ожидаемая продолжительность жизни мужчин выросла больше чем женщин на 1,35%.

2.5. Средние показатели в рядах динамики

Для обобщающей характеристики динамики за рассматриваемый период времени рассчитывают **средние из показателей изменений уровней ряда** (в дополнение к средним уровням ряда).

1. **Среднее абсолютное изменение**, или средняя скорость изменения (рассчитывается как средняя арифметическая из показателей скорости изменения за отдельные промежутки времени и показывает, на сколько в среднем в единицу времени увеличивается или уменьшается уровень ряда в своих единицах измерения):

$$\bar{\Delta} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \Delta_i}{n-1} = \frac{y_n - y_1}{n-1},$$

где Δ_i — цепные абсолютные изменения; y_n, y_1 — конечный и начальный уровни ряда; n — количество уровней ряда.

Примечание. Если под n понимается количество абсолютных изменений, очевидно, что приведенная формула становится формулой средней арифметической простой:

$$\bar{\Delta} = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta_i}{n}.$$

2. **Средний коэффициент изменения** (вычисляется по формуле средней геометрической из коэффициентов изменения за отдельные периоды и показывает, во сколько раз в среднем за период изменялись уровни динамического ряда):

$$\bar{k} = \sqrt[n]{k_1 k_2 \dots k_{n-1}} = \sqrt[n]{\frac{y_n}{y_1}},$$

где k_i — цепные коэффициенты изменения; y_n, y_1 — конечный и начальный уровни ряда; n — количество уровней ряда.

3. **Средний темп прироста** (определяется на основании данных о среднем темпе изменения и показывает, на сколько процентов в среднем изменяется уровень ряда):

$$\bar{T}_{\text{пр}} = \bar{k} \cdot 100 - 100\% = \bar{T} - 100\%,$$

где \bar{k} — средний коэффициент изменения; \bar{T} — средний темп роста.

Используя данные об ожидаемой продолжительности жизни населения РФ (см. табл. 2.1), рассчитаем средние показатели динамики.

$$1. \bar{\Delta} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \Delta_i}{n-1} = \frac{4,49}{11} = 0,408.$$

$$2. \bar{k} = \sqrt[n]{k_1 k_2 \dots k_{n-1}} = \sqrt[11]{1,0687} = 1,0061.$$

$$3. \bar{T}_{\text{пр}} = \bar{k} \cdot 100 - 100\% = 1,0061 \cdot 100 - 100\% = +0,61\%.$$

Таким образом, можно сказать, что *в среднем в год* ожидаемая продолжительность жизни населения РФ *увеличивалась* на 0,4 года или на 0,61%.

Следует обратить внимание на обоснованное использование средних показателей динамики. Данные величины могут давать содержательную оценку изменений только в том случае, когда эти изменения сравнимы между собой, когда их изменчивость невелика. В противном случае рассчитываемые средние величины абсолютно формальны и никакой аналитической ценности не имеют.

Тема 3

ПЕРИОДИЗАЦИЯ ДИНАМИКИ. МЕТОДЫ ВЫЯВЛЕНИЯ ОСНОВНОЙ ТЕНДЕНЦИИ ДИНАМИКИ

3.1. Понятие периодизации

При изучении динамики какого-либо явления непосредственному построению динамического ряда должен предшествовать теоретический анализ временных изменений изучаемого явления с целью выделения однородных этапов его развития; эта процедура называется **периодизацией динамики**. Она должна производиться исходя из содержания данного явления, закономерностей его изменений; к проведению данного анализа привлекаются эксперты из соответствующей области: если строится динамический ряд финансовых показателей, то привлекаются финансовые аналитики, при анализе демографических закономерностей — демографы, и т.п.

Очевидно, что если производится изучение демографических показателей за длительный период (например, за столетие), то наличие войн, эпидемий в течение этого периода оказывает существенное влияние на динамику этих показателей. Вероятнее всего при их рассмотрении следует составить несколько временных рядов, например довоенный, военный и т.п., и изучать закономерности изменений показателей, сформировавшихся в качественно однородной среде. Подобные события, кардинально изменяющие условия развития явления и, следовательно, качественно меняющие показатели для их характеристики могут присутствовать в разных сферах. Технологическая реконструкция, модернизация на производстве (например, замена технологической линии) приведут к качественному скачку показателей, характеризующих эффективность деятельности. Соответственно по многим показателям необходимо будет выделять периоды до и после реконструкции. Введение в действие новых социальных программ, законов может разделить развитие каких-либо социальных явлений на отдельные этапы.

При таких контрастных изменениях выделение этапов развития явления, как правило, не вызывает серьезных затруднений. Однако каждый раз следует тщательно оценить однородность развития с точки зрения влияния ее на конкретный изучаемый показатель. Оценка осуществляется исходя из изменений анализируемого показателя и анализа явления специалистом данной области. При изучении производительности оборудования, например, влияющим фактором окажется изменение технологии, но вряд ли таким фактором может считаться смена собственника предприятия.

Влияние мирового экономического кризиса на большинство экономических показателей неоспоримо. Но всегда ли это основание для выделения разных этапов развития явления, т.е. разных периодов изменения конкретного показателя? Рассмотрим пример.

В табл. 3.1 приведена динамика экспорта товаров и услуг РФ с 2004 по 2012 г., т.е. включая мировой экономический кризис. В 2009 г. наблюдается снижение объема экспорта по сравнению с предыдущим годом (влияние кризиса). Однако уже в следующем 2010 г. размер экспорта превысил все предыдущие значения. Можно констатировать, что мировой экономический кризис не стал поводом для периодизации динамики экспорта РФ.

Таблица 3.1

Динамика экспорта товаров и услуг РФ в текущих ценах

Год	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012
Всего, трлн руб.	5,9	7,6	9,1	10,0	12,9	10,8	13,5	16,9	18,5

Первичный теоретический анализ временных изменений во многом предопределяет результаты всего анализа динамики. Тщательное изучение самого явления существенно способствует корректному анализу конкретных показателей, достоверному и точному прогнозированию будущих значений.

3.2. Механические методы выявления основной тенденции

После оценки направлений и степени временных изменений ставится задача выявления закономерностей изменения уровней ряда на протяжении изучаемого периода времени. Колебания уровней динамического ряда могут вызываться действием каких-либо определенных факторов, способствующих повышению или понижению показателей, влиянием сезонности, а также случайными причинами. Выделяют три компонента изменения уровней динамики: 1) тенденцию; 2) систематические колебания; 3) случайные колебания.

Необходимо разделить эти три компонента и выявить прежде всего общую тенденцию в изменении уровней ряда, обусловленную действием основополагающих причин, освобожденную от действия различных случайных факторов. Под **тенденцией**, или трендом, понимается общее направление к росту, снижению или стабилизации уровня явления с течением времени. Рост и снижение уровней могут происходить по-разному: равномерно, ускоренно или замедленно. Практически уровни ряда динамики очень редко растут (или снижаются) строго равномерно или систематически. Именно из-за существования отклонений от строгой закономерности принято говорить не просто о росте или снижении уровня, а о его тенденции к росту или снижению. Такие отклонения могут объясняться тем, что с течением времени изменяются либо комплекс основных причин и факторов, от которых зависит уровень явления, либо сила их действия, либо внешние условия, в которых происходит развитие явления. Могут изменяться также направление и сила влияния второстепенных факторов. Поэтому при анализе динамики ставится задача выявления не просто тенденции развития, а основной тенденции, достаточно стабильной на протяжении данного этапа развития. Для решения данной задачи используются различные методы, которые принято разделять на механические и аналитические. К первой группе относятся методы укрупненных интервалов и скользящих средних.

Итак, рассмотрим первый метод для выявления основной тенденции динамики — *метод укрупненных интервалов* (для абсолютных величин), или *метод многолетних средних уровней* (для относительных и средних показателей), например трехлетних или пятилетних средних, особенно часто применяемых на практике. При использовании этого метода объединение показателей за несколько интервалов в итоговой сумме или средней позволяет «гасить» влияние случайных факторов. При сравнении трех-, пятилетних данных на первый план выступают изменения, зависящие от постоянно действующих факторов, т.е. основная тенденция динамики. Метод заключается в переходе от интервалов менее продолжительных к более продолжительным и характеристике их суммами или средними уровнями. Если динамический ряд построен из абсолютных показателей, то, применяя данный метод, достаточно суммировать данные за больший срок и анализировать полученные итоги. Если динамический ряд состоит из относительных величин или средних показателей, то нужно рассчитывать средние уровни за увеличенный интервал. Существенными недостатками метода являются: 1) существенное сокращение динамического ряда; 2) исчезновение из анализа движения уровней внутри укрупненных интервалов. Эти недостатки могут быть устранены использованием другого метода механического вырав-

нивания — *метода скользящих средних*. Он заключается в замене фактических уровней рядом подвижных (скользящих) средних, которые рассчитываются для определенных последовательно подвижных (скользящих) интервалов и относятся к середине каждого из них. В результате исключаются колебания за счет случайных факторов.

Рассмотрим применение механического выравнивания на примере динамики урожайности зерновых культур по РФ (табл. 3.2). Динамика сельскохозяйственных показателей включает в себя влияние основополагающих факторов (агротехника, качество земли и др.) и случайных (погодные условия).

Таблица 3.2

Динамика урожайности зерновых по РФ

Год	Урожайность, ц/га	Трехлетняя средняя	Трехлетняя скользящая средняя
2000	15,6	—	—
2001	19,4	18,20	18,20
2002	19,6	—	18,93
2003	17,8	—	18,73
2004	18,8	18,37	18,37
2005	18,5	—	18,73
2006	18,9	—	19,07
2007	19,8	20,83	20,83
2008	23,8	—	22,10
2009	22,7	—	21,60
2010	18,3	21,13	21,13
2011	22,4	—	—

В табл. 3.2 (гр. 3) рассчитаны трехлетние средние урожайности, в результате получен новый динамический ряд, состоящий из четырех уровней. В данном случае это преобразование позволило выявить тенденцию к увеличению урожайности зерновых за последние 12 лет — урожайность зерновых увеличивается. В гр. 4 дан расчет трехлетних скользящих средних. Динамика преобразованных уровней подтверждает общую тенденцию к росту урожайности, хотя этот рост не является неуклонным.

За какой период рассчитывать средние (трех-, пяти-, восьми-летний), определяют в зависимости от конкретных условий динамики. Если в колебаниях уровня есть определенная периодичность, то за период сглаживания берут период колебаний или кратную

ему величину. Если колебания беспорядочны, то целесообразно постепенно укрупнять интервалы сглаживания, пока не выявится отчетливая картина тренда. Недостатком метода является «укорачивание» сглаженного ряда по сравнению с исходным. Кроме того, скользящая средняя позволяет уловить особенности изменения тенденции, *не давая количественной ее оценки.*

3.3. Аналитическое выравнивание

Содержание метода аналитического выравнивания динамического ряда состоит в следующем. На основе фактических данных ряда подбирается наиболее подходящая для отражения тенденции развития явления математическая формула (аппроксимирующая функция), по которой рассчитываются выравненные (теоретические) значения. Таким образом, уровни ряда рассматриваются как функция от времени, а задача выравнивания сводится к определению вида функции, отысканию ее параметров по эмпирическим данным и расчету теоретических уровней по выбранной формуле.

Основными функциями, используемыми для выявления тенденции развития, являются следующие.

1. *Линейная зависимость* (применяется, если цепные абсолютные изменения относительно стабильны, не имеют отчетливой тенденции к росту или снижению, т.е. уровень изменяется с достаточно постоянной абсолютной скоростью):

$$\hat{y}_i = a + bt_i.$$

2. *Показательная функция* (экспонента) (применяется в случае, когда цепные коэффициенты изменения относительно стабильны, т.е. уровень ряда изменяется приблизительно с постоянной относительной скоростью):

$$\hat{y}_i = ab^t.$$

3. *Парабола второго порядка* (применяется в случае, когда абсолютные приросты равномерно возрастают или снижаются):

$$\hat{y}_i = a + bt_i + ct_i^2.$$

4. *Гипербола:*

$$y_i = a + \frac{b}{t_i}.$$

Кроме перечисленных функций могут быть подобраны другие математические формулы, адекватно отражающие временные изменения анализируемого показателя. Зависимость уровней

динамического ряда от фактора времени можно считать частным случаем корреляционной зависимости. Параметры уравнения, как правило, определяются методом наименьших квадратов, при котором сумма квадратов отклонений выравненных (теоретических) значений от эмпирических минимальна:

$$\sum(y_i - \hat{y}_i)^2 \rightarrow \min.$$

Это обеспечивает нахождение именно той заданной кривой, которая наилучшим образом отражает динамику фактического ряда. Таким образом, помимо выявления направления основной тенденции аналитическое выравнение дает ее числовую характеристику, что, безусловно, делает этот метод наиболее востребованным. Следует обратить внимание на то, что при анализе развития какого-либо явления исследователь, как правило, строит несколько моделей, пытаясь найти ту, которая наиболее адекватно отражает существующую динамику. Модели более высоких порядков будут точнее описывать исходный временной ряд. Однако при выборе трендовой модели из достаточно схожих уравнений стоит отдавать предпочтение более простой линии, так как надежность ее параметров, как правило, выше. Построенная динамическая модель может использоваться для прогнозирования дальнейшего развития изучаемого явления.

Тема 4

ОСНОВНЫЕ ТРЕНДОВЫЕ МОДЕЛИ

4.1. Линейный тренд

Самым простым уравнением и с точки зрения построения, и с точки зрения интерпретации является уравнение прямой. Построение линейного тренда $\hat{y}_i = a + bt_i$ сводится к определению двух параметров: свободного члена a и коэффициента b . Расчет этих параметров осуществляется решением следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} na + b\sum t_i = \sum y_i, \\ a\sum t_i + b\sum t_i^2 = \sum y_i t_i, \end{cases}$$

где n — число уровней ряда; t_i — порядковый номер периода времени; y_i — эмпирические значения уровней ряда.

Если отсчет времени начинается с первого уровня ряда, то свободный член a — это значение показателя в начале отсчета. Коэффициент регрессии b показывает, на сколько в среднем в единицу времени происходит изменение уровней временного ряда в его единицах измерения. При выполнении расчетов вручную для их упрощения используют следующий прием — за начало отсчета выбирают серединный уровень ряда. Тогда сумма пронумерованных периодов становится равной нулю и система уравнений для нахождения параметров уравнения существенно упрощается:

$$\begin{cases} na = \sum y_i, \\ b\sum t_i^2 = \sum y_i t_i. \end{cases}$$

При этом свободный член a становится средним уровнем ряда.

Рассмотрим расчет параметров прямой на примере общей площади жилых помещений, приходящейся в среднем на одного жителя г. Санкт-Петербурга с 2005 по 2011 г. По исходным данным (табл. 4.1) видно, что значение показателя от года к году увеличивается, причем ежегодный рост общей площади жилищ в среднем на одного жителя примерно одинаков и составляет 0,3 м².

Таблица 4.1

Расчет теоретических (выравненных) уровней линейного тренда

Год	Общая площадь на одного жителя, м ²	t_i	t_i^2	$y_i t_i$	\hat{y}_i
2005	21,3	1	1	21,3	21,37
2006	21,6	2	4	43,2	21,70
2007	22,2	3	9	66,6	22,04
2008	22,5	4	16	90,0	22,37
2009	22,7	5	25	113,5	22,70
2010	23,0	6	36	138,0	23,03
2011	23,3	7	49	163,1	23,36
Всего	156,6	28	140	635,7	156,58

Заполнив расчетную таблицу и получив необходимые суммы, подставим их в систему уравнений и найдем параметры прямой:

$$\begin{cases} 7a + 28b = 156,6, \\ 28a + 140b = 635,7; \end{cases}$$

$$a = 21,4; b = 0,332.$$

Полученное уравнение будет следующим: $\hat{y}_i = 21,04 + 0,332t_i$. Исходный динамический ряд и полученная прямая представлены на рис. 4.1.

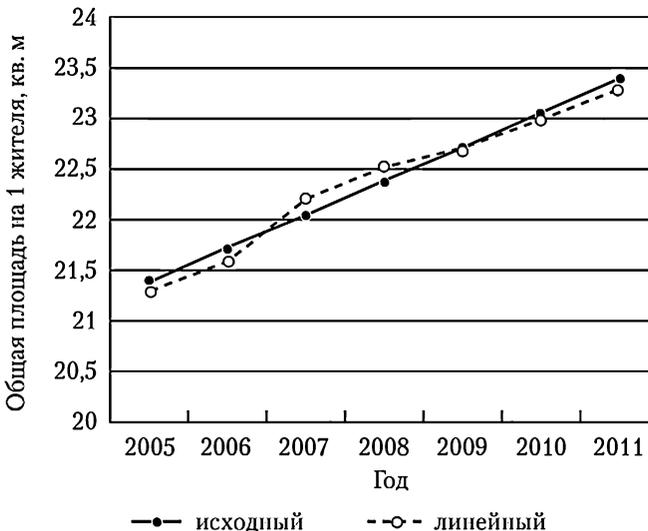


Рис. 4.1. Динамика общей площади жилищ на одного жителя

Если в качестве начала отсчета выбрать середину ряда, то аналогичный расчет будет выглядеть следующим образом (табл. 4.2).

Таблица 4.2

Расчет теоретических (выравненных) уровней линейного тренда

Год	Общая площадь на одного жителя, м ²	t_i	t_i^2	$y_i t_i$	\hat{y}_i
2005	21,3	-3	9	-63,9	21,37
2006	21,6	-2	4	-43,2	21,71
2007	22,2	-1	1	-22,2	22,04
2008	22,5	0	0	0	22,37
2009	22,7	1	1	22,7	22,70
2010	23,0	2	4	46,0	23,03
2011	23,3	3	9	69,9	23,37
Всего	156,6	0	28	9,3	156,59

$$\begin{cases} 7a = 156,6, \\ 28b = 9,3; \end{cases}$$

$$a = 22,37; b = 0,332;$$

$$\hat{y}_i = 22,37 + 0,332t_i.$$

В результате вычислений по эмпирическим данным построены два уравнения, в которых коэффициент прироста одинаков, различаются лишь значения свободных членов уравнений. Параметр

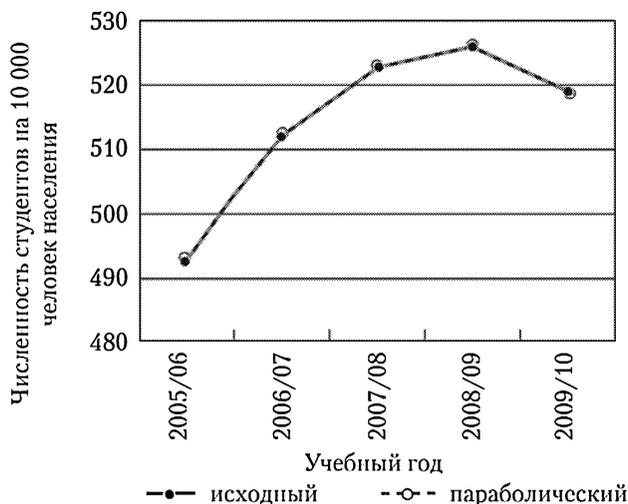


Рис. 4.2. Динамика численности студентов на 10 000 человек населения РФ

$b = 0,332$ означает, что в среднем в год происходит рост общей площади жилищ на одного жителя Санкт-Петербурга на $0,332 \text{ м}^2$. Свободный член показывает теоретическое (выравненное) значение показателя в начале отсчета: в первом варианте — в начале динамического ряда, во втором — в середине ряда. Можно добавить, что во втором случае свободный член является средним значением уровней динамического ряда, т.е. средняя общая площадь жилья за этот период составила $22,37 \text{ м}^2$ на одного человека.

4.2. Параболический тренд

Под параболическим трендом понимается, как правило, парабола второго порядка, но могут использоваться и параболы более высоких порядков. Чаще всего данное уравнение используется, если уровни ряда со временем увеличиваются или уменьшаются с ускорением. Обычно это какой-то ограниченный этап развития явления. Общий вид уравнения параболического тренда следующий:

$$\hat{y}_i = a + bt_i + ct_i^2.$$

Для нахождения параметров уравнения методом наименьших квадратов следует решить следующую систему нормальных уравнений:

$$\begin{cases} na + b\sum t_i + c\sum t_i^2 = \sum y_i, \\ a\sum t_i + b\sum t_i^2 + c\sum t_i^3 = \sum y_i t_i, \\ a\sum t_i^2 + b\sum t_i^3 + c\sum t_i^4 = \sum y_i t_i^2. \end{cases}$$

В случае выбора началом отсчета срединного уровня ряда расчеты могут быть существенно упрощены.

В качестве примера рассмотрим показатель числа студентов на 10 000 человек населения за пятилетний период. В расчетной табл. 4.3 представлен расчет цепных абсолютных изменений, которые на анализируемом интервале становятся все меньше, переходя к отрицательному значению. При этом рассчитанные разницы между ними, т.е. ускорения, почти неизменны, что наводит на мысль о построении именно параболы (рис. 4.2).

Таблица 4.3

Расчет параметров параболы второго порядка

Учебный год	y_i	$\Delta_{\text{цеп}}$	Δ_{Δ}	t_i	t_i^2	t_i^3	t_i^4	$y_i t_i$	$y_i t_i^2$	\hat{y}_i
2005/06	493	—	—	1	1	1	1	493	493	492,83
2006/07	512	19	—	2	4	8	16	1024	2048	512,29
2007/08	523	11	-8	3	9	27	81	1569	4707	523,17

Учебный год	y_i	$\Delta_{\text{цеп}}$	Δ_{Δ}	t_i	t_i^2	t_i^3	t_i^4	$y_i t_i$	$y_i t_i^2$	\hat{y}_i
2008/09	526	3	-8	4	16	64	256	2104	8416	525,48
2009/10	519	-7	-10	5	25	125	625	2595	12 975	519,23
Итого	2573	26	-26	15	55	225	979	7785	28 639	2573,00

Полученные в таблице суммы подставим в систему уравнений и найдем значения параметров параболы:

$$\begin{cases} 5a + 15b + 55c = 2573, \\ 15a + 55b + 225c = 7785, \\ 55a + 225b + 797c = 28\,639. \end{cases}$$

Отсюда $\hat{y}_i = 464,8 + 32,314t_i - 4,2857t_i^2$.

Таким образом, параболический тренд, отражающий изменение численности студентов на 10 000 человек населения РФ, получен.

4.3. Показательная функция

Данный вид тренда используется в случае изменения уровней ряда в геометрической прогрессии, т.е. когда цепные коэффициенты изменения приблизительно стабильны. Общий вид уравнения: $\hat{y}_i = ab^{t_i}$. Если прологарифмировать обе части формулы, то получим линейную функцию $\lg \hat{y}_i = \lg a + t_i \lg b$. Отсюда, заменив уровни ряда их логарифмами, можно найти параметры a и b через их логарифмы с помощью системы уравнений:

$$\begin{cases} n \lg a + \lg b \sum t_i = \sum \lg y_i, \\ \lg a \sum t_i + \lg b \sum t_i^2 = \sum t_i \lg y_i. \end{cases}$$

При отсчете от срединного уровня, когда $\sum t_i = 0$, расчет параметров существенно упрощается:

$$\begin{cases} n \lg a = \sum \lg y_i, \\ \lg b \sum t_i^2 = \sum t_i \lg y_i. \end{cases}$$

Рассмотрим выравнивание временного ряда по показательной функции на примере динамики экспорта РФ за 2002–2008 гг. В этот период наблюдался рост объема экспорта, причем от года к году цепные коэффициенты были приблизительно одинаковы. В табл. 4.4 даны промежуточные вычисления. Итоговые значения подставим в систему уравнений для нахождения параметров показательной функции.

Расчет параметров показательной функции

Год	y_i	$k_{цеп}$	$\lg y_i$	t_i	t_i^2	$t_i \lg y_i$	\hat{y}_i
2002	106,7	—	2,028164	1	1	2,028164	108,5
2003	133,7	1,25	2,126131	2	4	4,252263	138,7
2004	181,6	1,36	2,259116	3	9	6,777348	177,4
2005	241,5	1,33	2,382917	4	16	9,531669	226,8
2006	301,2	1,25	2,478855	5	25	12,39427	290,1
2007	351,9	1,17	2,546419	6	36	15,27852	370,9
2008	468,1	1,33	2,670339	7	49	18,69237	474,3
Всего	1784,7	—	16,49194	28	140	68,9546	1786,7

$$\begin{cases} 7 \lg a + 28 \lg b = 16,49, \\ 28 \lg a + 140 \lg b = 68,95. \end{cases}$$

Отсюда $\lg b = 0,10678$, т.е. $b = 1,2787$; $\lg a = 1,92859$, т.е. $a = 84,837$.

Следовательно, $\hat{y}_i = 84,8379 \cdot 1,2787^{t_i}$.

График исходного динамического ряда и выравненного (по показательной функции) ряда наглядно подтверждают соответствие выбранной функции (рис. 4.3).

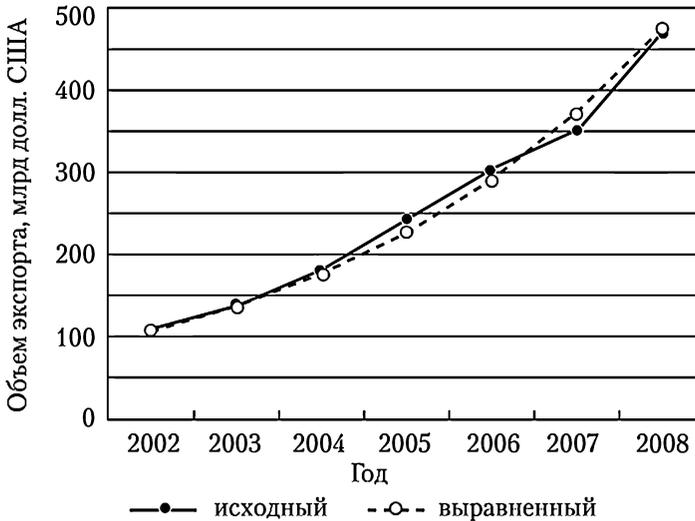


Рис. 4.3. Динамика экспорта РФ за 2002–2008 гг.

4.4. Гиперболический тренд

Применение уравнения гиперболы в качестве трендовой модели дает наилучшие результаты в случаях рассмотрения этапов развития явления, когда анализируемый показатель сначала резко снижается, а затем продолжает уменьшаться меньшими темпами. При этом этот показатель не может принимать нулевые или отрицательные значения.

Для определения параметров уравнения гиперболы

$$\hat{y}_i = a + b \frac{1}{t_i}$$

необходимо решить систему нормальных уравнений:

$$\begin{cases} na + b \sum \frac{1}{t_i} = \sum y_i, \\ a \sum \frac{1}{t_i} + b \sum \left(\frac{1}{t_i} \right)^2 = \sum \frac{y_i}{t_i}. \end{cases}$$

Рассмотрим построение гиперболического тренда на условном примере (табл. 4.5) динамики расхода материала на одно изделие (m^2).

Таблица 4.5

Расчет параметров гиперболической функции

Год	y_i	t_i	$1/t_i$	$(1/t_i)^2$	y_i/t_i	\hat{y}_i
2005	140	1	1,00	1,00	140,0	138,6
2006	96	2	0,50	0,25	48,0	101,0
2007	86	3	0,33	0,11	28,7	88,5
2008	82	4	0,25	0,06	20,5	82,2
2009	80	5	0,20	0,04	16,0	78,4
2010	78	6	0,17	0,03	13,0	75,9
2011	77	7	0,14	0,02	11,0	74,1
Всего	639	28	2,59	1,51	277,2	638,8

$$\begin{cases} 7a + 2,59b = 639, \\ 2,59a + 1,5b = 277,2. \end{cases}$$

Отсюда

$$\hat{y}_i = 63,4 + 75,2 \frac{1}{t_i}.$$

Графическое изображение исходного ряда и гиперболического тренда представлено на рис. 4.4.

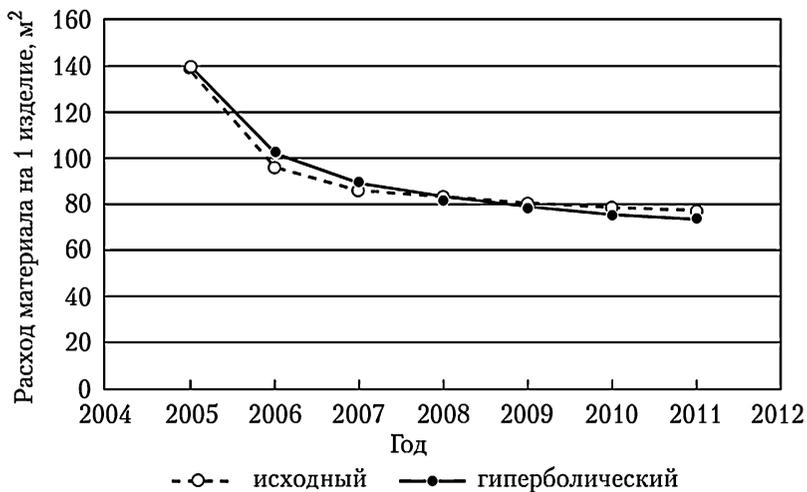


Рис. 4.4. Динамика расхода материала на одно изделие

Следует обратить внимание на то, что значение свободного члена в уравнении является предельным значением для данного показателя, т.е. расход материала на одно изделие не может быть меньше $63,4 \text{ м}^2$.

Тема 5

УСТОЙЧИВОСТЬ ВРЕМЕННОГО РЯДА

5.1. Измерение устойчивости уровней ряда

Первоначально следует определить, что именно включается в понятие устойчивости временного ряда. Как было отмечено ранее, при анализе динамики исследователь стремится выделить изменения показателя под влиянием основополагающих причин и под влиянием случайных факторов. Однако это разделение — условный прием. Динамика показателя, как правило, включает в себя направленные изменения (тенденцию) и случайные колебания вокруг этого тренда. Отсюда возникает необходимость отдельного рассмотрения устойчивости уровней ряда и устойчивости тенденции динамики. Можно сказать, что устойчивость временного ряда обеспечивается наличием тренда, тенденции изменения и минимизацией колебаний фактических уровней временного ряда около этого тренда. Достижение *устойчивого роста* результативных показателей часто является основной задачей в экономике и других областях человеческой деятельности.

Самой простой оценкой устойчивости уровней временного ряда, по аналогии с размахом вариации, является размах колеблемости средних уровней за благоприятные и неблагоприятные периоды времени. К благоприятным периодам относятся те периоды, когда уровни были выше трендовых, к неблагоприятным — периоды с уровнями ниже трендовых:

$$R = \bar{y}_{\text{благ}} - \bar{y}_{\text{неблаг}},$$

где $\bar{y}_{\text{благ}}$ — средняя величина из уровней за благоприятные периоды; $\bar{y}_{\text{неблаг}}$ — средняя величина из уровней за неблагоприятные периоды.

В качестве оценки устойчивости уровней может использоваться и соотношение средних уровней за благоприятные и неблагоприятные периоды. Этот показатель называется индексом устойчивости уровней динамического ряда; чем ближе его значение к единице, тем меньше колеблемость, а значит, выше устойчивость.

$$i_y = \frac{\bar{y}_{\text{благ}}}{\bar{y}_{\text{неблаг}}}.$$

К обобщающим абсолютным показателям отклонений фактических уровней от тренда относят среднее линейное отклонение и среднее квадратическое отклонение:

$$\bar{l}_t = \frac{\sum |y_i - \hat{y}_i|}{n-p}; \quad \sigma_t = \sqrt{\frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{n-p}},$$

где y_i — фактический уровень; \hat{y}_i — выравненный уровень; n — количество уровней ряда; p — число параметров уравнения.

Среднее квадратическое отклонение часто называют точностью модели. Оба показателя являются абсолютными величинами, характеризующими колеблемость фактических уровней около тренда, имеющими те же единицы измерения, что и сам признак. Для сравнения степени колеблемости по показателям с разными единицами измерения используются относительные показатели. Они рассчитываются соотношением абсолютных значений со средним уровнем временного ряда:

- *коэффициент линейной колеблемости*

$$V_l = \frac{\bar{l}_t}{\bar{y}} \cdot 100\%,$$

- *коэффициент колеблемости*

$$V_\sigma = \frac{\sigma_t}{\bar{y}} \cdot 100\%.$$

На основе коэффициента колеблемости определяют коэффициент устойчивости:

$$K_{уст} = 100 - V_\sigma.$$

Если коэффициент колеблемости составил 10%, то коэффициент устойчивости соответственно равен 90%. Это означает, что среднее колебание относительно среднего уровня составляет 10%. При этом следует помнить, что вероятность того, что конкретные колебания не превысят среднеквадратического отклонения составляет 68,3%, если распределение колебаний по их величине близко к нормальному распределению.

5.2. Измерение устойчивости тенденции динамики

Для оценки устойчивости тенденции динамики чаще всего используется коэффициент рангов Спирмена, рассчитываемый по формуле

$$\rho = 1 - \frac{6 \sum \Delta^2}{n^3 - n},$$

где Δ — разница рангов; n — количество уровней ряда.

Прежде чем использовать формулу, необходимо пронумеровать периоды времени и уровни ряда в порядке возрастания, т.е. каждому периоду времени и каждому уровню присваивается номер в порядке возрастания. В случае совпадения значений уровней ряда им присваивается ранг, равный частному от деления суммы рангов, входящих на эти значения, на число совпадающих значений.

Коэффициент рангов может принимать значения от 0 до 1 по абсолютному значению. Значение коэффициента +1 означает, что ранги периодов и ранги уровней совпадали, т.е. с ростом номеров периодов увеличивались ранги уровней, следовательно, имеет место устойчивый, непрерывный рост. Если коэффициент рангов равен нулю, то это свидетельство отсутствия устойчивого роста. При коэффициенте -1 следует говорить об устойчивом снижении показателя. Реальные значения коэффициента рангов Спирмена находятся между этими значениями. По их приближенности к единице (или минус единице) следует делать вывод об устойчивом росте (или снижении).

В табл. 5.1 представлен динамический ряд показателя введенных в действие санаториев в РФ (тыс. коек). Рассмотрим устойчивость тенденции данного динамического ряда, рассчитав коэффициент Спирмена.

Таблица 5.1

Расчет коэффициента рангов Спирмена

Год	Всего, тыс. коек	Ранги, лет	Ранги, уровней	Δ^2
1997	1,7	1	7,5	42
1998	2,5	2	12,5	110
1999	1,1	3	4,0	1
2000	2,6	4	14,0	100
2001	2,1	5	10,5	30
2002	2,1	6	10,5	20
2003	2,0	7	9,0	4
2004	0,8	8	1,5	42
2005	2,7	9	15,0	36
2006	1,0	10	3,0	49
2007	0,8	11	1,5	90

Год	Всего, тыс. коек	Ранги, лет	Ранги, уровней	Δ^2
2008	1,7	12	7,5	20
2009	1,6	13	6,0	49
2010	2,5	14	12,5	2
2011	1,4	15	5,0	100
Всего	26,6	120	120	697

$$\rho = 1 - \frac{6 \cdot 697}{15^3 - 15} = 1 - 1,2446 = -0,2446.$$

Полученное значение говорит о слабой устойчивости к снижению (отрицательное значение) количества мест во вновь вводимых санаториях в РФ. Иллюстрацией этого вывода может служить график данного временного ряда (рис. 5.1). На нем видно, что уровни ряда меняются от года к году в сторону увеличения и снижения хаотично, тенденция к снижению едва заметна.

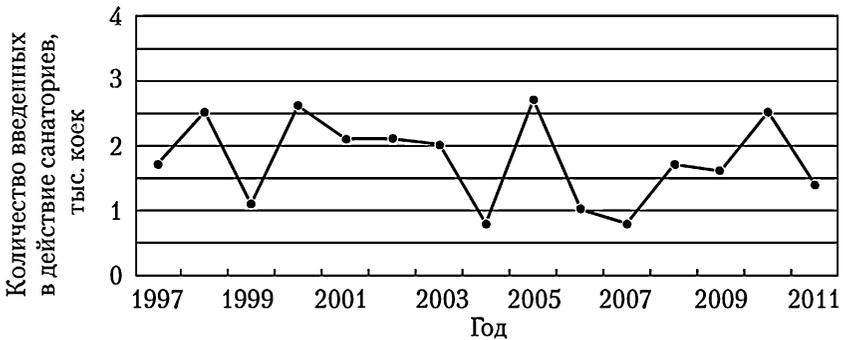


Рис. 5.1. Динамика введенных в действие санаториев в РФ

Коэффициент рангов прост в вычислении и удобен тем, что не требует предварительного выравнивания исходного временного ряда. Существенным его недостатком является то, что в нем не учитывается степень изменений. Он может показать устойчивый рост при слабо отличающихся от нуля приростах уровней. В нашем примере в 2003 г. снижение на 0,1 тыс. коек равнозначно уменьшению показателя в 1999 г. на 1,4 тыс. коек.

Для оценки устойчивости тенденции может быть использован индекс корреляции

$$I_r = \sqrt{1 - \frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2}},$$

где y_i — фактические уровни; \hat{y}_i — выравненные уровни; \bar{y} — средний уровень ряда.

Индекс корреляции показывает степень сопряженности колебаний фактических уровней с колебаниями теоретических уровней, происходящих под влиянием комплекса основополагающих факторов.

В рассмотренном выше примере о количестве введенных в действие санаториев может быть построена линейная трендовая модель: $\hat{y}_i = 2,0805 - 0,0307t_i$. Отрицательное значение коэффициента регрессии подтверждает наличие тенденции к снижению уровней. Для оценки устойчивости этой тенденции вычислим индекс корреляции:

$$I_r = \sqrt{1 - \frac{\sum(y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum(y_i - \bar{y})^2}} = \sqrt{1 - \frac{5,78}{5,99}} = \sqrt{0,0351} = 0,187.$$

Полученное значение, близкое к нулю, говорит о слабой устойчивости самой тенденции в данном динамическом ряду.

Важно отметить, что при оценке устойчивости временного ряда следует одновременно использовать показатели, характеризующие устойчивость уровней ряда, и показатели устойчивости тенденции динамики. На практике даже при полной устойчивости роста может присутствовать колеблемость уровней (коэффициент устойчивости меньше 100%).

Тема 6

СЕЗОННОСТЬ И ЕЕ ИЗМЕРЕНИЕ

6.1. Выявление наличия и измерение сезонности

Одним из компонентов изменения уровней динамического ряда является кратковременное систематическое движение. Чаще всего это сезонные колебания, характеризующиеся постоянным повышением и понижением уровней ряда в одни и те же периоды года (месяцы, кварталы). Сезонность свойственна многим явлениям, особенно заметно она проявляется в сельском хозяйстве, торговле, туристическом бизнесе и др. Для стабильности развития желательно снижение сезонных колебаний, однако это зачастую невозможно, поэтому задача сводится к тому, чтобы учитывать эти колебания, а следовательно, уметь их измерять. Поэтому выявление степени колеблемости уровней ряда по сезонам с целью ее учета в практической деятельности представляет собой актуальную задачу исследования временных изменений.

Выявление наличия сезонных колебаний может начинаться с графического представления исходных данных. Для этого используют линейный график в системе координат. По нему визуально делается предположение о наличии сезонности. Кроме того, графически сезонные колебания можно изобразить радиальной диаграммой. Этот вид графика хорошо демонстрирует смещение значений показателя по сезонам относительно среднего (стабильного) уровня.

Существуют различные способы измерения сезонных колебаний. В основе оценки степени сезонности лежит сопоставление фактических уровней со средним или сглаженными уровнями. Основные показатели сезонности можно подразделить на два вида: 1) показатели формы сезонной волны; 2) показатели силы сезонных колебаний.

К первой группе относятся:

- абсолютные отклонения уровня каждого отдельного месяца от среднемесячного уровня за год: $\Delta_i = y_i - \bar{y}$;
- отношение уровня отдельного месяца к среднему уровню за год, выраженное в процентах:

$$i_i = \frac{y_i}{\bar{y}} \cdot 100\%;$$

этот показатель называется **индексом сезонности** (существуют другие способы его расчета).

Силу сезонных колебаний показывает коэффициент сезонности:

$$V_c = \frac{\sigma_c}{\bar{y}} \cdot 100\%,$$

где

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n}},$$

где V_c — коэффициент сезонности; σ_c — среднеквадратическое отклонение фактических значений от среднего уровня; n — количество уровней ряда.

Степень колеблемости оценивается в соответствии со значениями коэффициента сезонности следующим образом:

Коэффициент сезонности, %	Колеблемость по сезонам
Менее 10	Слабая
10–20	Средняя
20–40	Сильная
Более 40	Очень сильная

Рассмотрим расчет перечисленных показателей на примере (табл. 6.1).

Таблица 6.1

Продажа велосипедов в магазинах области за год

Месяц	Количество, тыс. шт.	Абсолютное отклонение, тыс. шт.	Индекс сезонности, %	$(y_i - \bar{y})^2$
Январь	39	-90	30,2	8100
Февраль	62	-67	48,1	4489
Март	125	-4	96,9	16
Апрель	256	127	198,4	16 129
Май	276	147	214,0	21 609
Июнь	255	126	197,7	15 876
Июль	178	49	138,0	2401
Август	144	15	111,6	225
Сентябрь	86	-43	66,7	1849
Октябрь	52	-77	40,3	5929
Ноябрь	38	-91	29,5	8281

Месяц	Количество, тыс. шт.	Абсолютное отклонение, тыс. шт.	Индекс сезонности, %	$(y_i - \bar{y})^2$
Декабрь	37	-92	28,7	8464
Всего	1548			93 368

Исходный временной ряд может быть представлен радиальной диаграммой (рис. 6.1), где отчетливо наблюдается смещение фактических значений вниз вправо, что означает увеличение количества проданных велосипедов в весенние и летние месяцы.

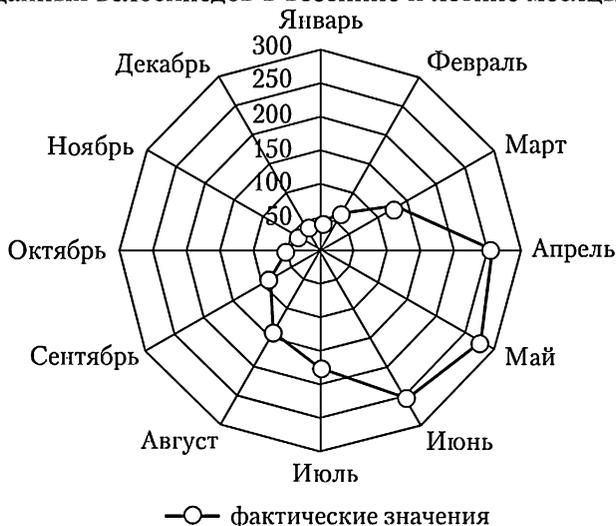


Рис. 6.1. Динамика объема продаж велосипедов в магазинах области, тыс. шт.

Для расчета абсолютного отклонения и индекса сезонности рассчитаем средний уровень ряда через среднюю арифметическую простую:

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{1548}{12} = 129 \text{ тыс. шт.}$$

Затем вычислим помесечные абсолютные отклонения от этого среднего уровня и индексы сезонности. Результаты представлены в табл. 6.1. Отрицательные значения абсолютных отклонений и индексы сезонности меньше 100% говорят о снижении значений показателя в эти месяцы, а положительные отклонения и индексы больше 100% соответственно о повышении анализируемого показателя. Минимального значения объем продаж достигал в декабре: на 92 тыс. шт. меньше среднего уровня или 28,7% от него, а мак-

симального в мае: на 147 тыс. шт. или в 2 раза больше среднего. Эти результаты могут быть представлены графически. На рис. 6.2 наглядно можно оценить степень абсолютных отклонений в обе стороны относительно нулевой отметки.

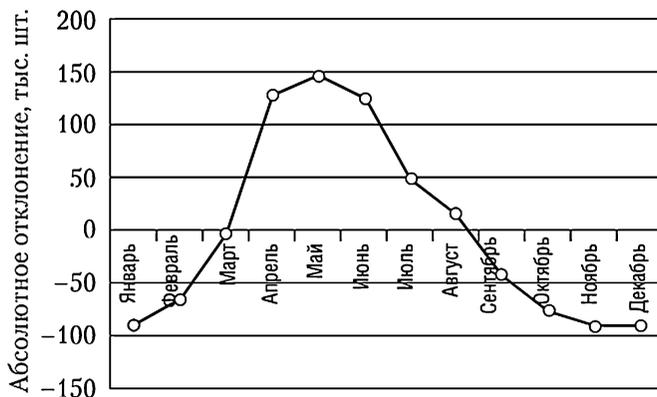


Рис. 6.2. Абсолютное отклонение от среднего объема продаж велосипедов в магазинах области

На рис. 6.3 оценка относительных изменений осуществляется сравнением высоты столбиков на диаграмме.

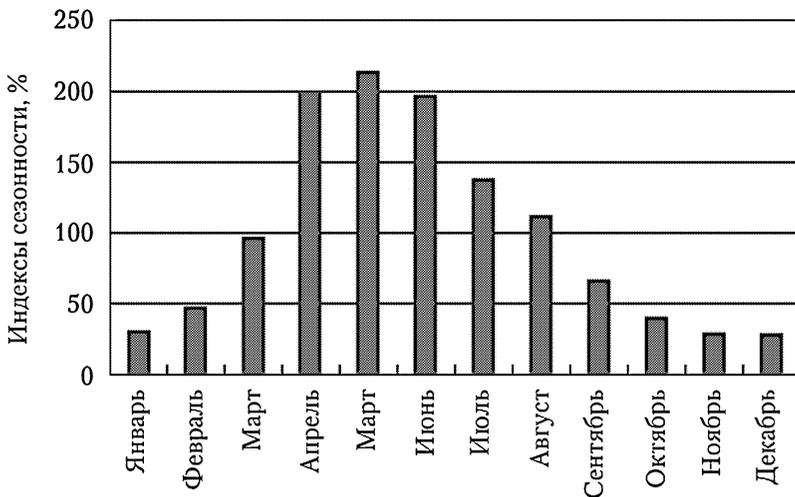


Рис. 6.3. Индексы сезонности объема продаж велосипедов в магазинах области

Силу сезонных колебаний оценим через коэффициент сезонности:

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n}} = \sqrt{\frac{93\,368}{12}} = 88,2,$$

$$V_c = \frac{\sigma_c}{\bar{y}} \cdot 100\% = \frac{88,2}{129} \cdot 100\% = 68,37\%.$$

Таким образом, полученное значение 68,37% говорит об очень сильной колеблемости по сезонам объемов продаж велосипедов.

6.2. Аналитическое выравнивание сезонных колебаний с помощью ряда Фурье

При выявлении периодических, в частности сезонных, колебаний может использоваться метод аналитического выравнивания, рассмотренный в подтеме 3.3. В этом случае наиболее подходящей формулой для моделирования временных изменений является ряд Фурье. Функция зависимости уровней временного ряда от времени может быть представлена следующим образом:

$$\hat{y}_t = a_0 + \sum_{k=1}^m (a_k \cos kt + b_k \sin kt),$$

где \hat{y}_t — выравненные значения; a_0, \dots, a_m — параметры уравнения; k — число гармоник; t — показатель времени.

При построении ряда Фурье получают гармоники — синусоиды, представляющие собой отражение гармонических колебаний. Число гармоник может быть различным. Как правило, строится несколько гармоник, из которых выбирается та, которая наиболее точно отражает исследуемые сезонные колебания (исходный ряд данных). Параметры уравнения определяются методом наименьших квадратов:

$$a_0 = \frac{\sum y}{n};$$

$$a_k = \frac{2 \sum y \cos kt}{n};$$

$$b_k = \frac{2 \sum y \sin kt}{n}.$$

Процедура выравнивания по ряду Фурье заключается в построении нескольких гармоник, накладывающихся одна на другую, до получения удовлетворяющей поставленной задаче.

При $k = 1$ ряд Фурье будет иметь следующий вид:

$$\hat{y}_{1t} = a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t;$$

при $k = 2$:

$$\hat{y}_{2t} = a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t + a_2 \cos 2t + b_2 \sin 2t;$$

при $k = 3$:

$$\hat{y}_{3t} = a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t + a_2 \cos 2t + b_2 \sin 2t + a_3 \cos 3t + b_3 \sin 3t$$

и т.д.

Значения времени t задают следующим образом. Если весь цикл изменения составляет 360° , то прирост времени от периода к периоду должен составлять $360^\circ/n$ или $2\pi/n$ (где n — число уровней ряда). То есть при $n = 12$ значения t будут принимать следующие значения:

$$0; \pi/6; \pi/3; \pi/2; 2\pi/3; 5\pi/6; \pi; 7\pi/6; 4\pi/3; 3\pi/2; 5\pi/3; 11\pi/6.$$

Рассмотрим выравнивание сезонной волны по ряду Фурье на примере из предыдущего пункта о продаже велосипедов (табл. 6.2).

Таблица 6.2

Расчет параметров первой гармоники

Месяц	t	y	$\cos t$	$\sin t$	$y \cdot \cos t$	$y \cdot \sin t$	\hat{y}_{1t}
Январь	0	39	1,000	0,000	39,000	0,000	46,0
Февраль	$\pi/6$	62	0,866	0,500	53,694	31,000	99,7
Март	$\pi/3$	125	0,500	0,866	62,500	108,253	161,4
Апрель	$\pi/2$	256	0,000	1,000	0,000	256,000	214,3
Май	$2\pi/3$	276	-0,500	0,866	-138,000	239,023	244,4
Июнь	$5\pi/6$	255	-0,866	0,500	-220,836	127,500	243,6
Июль	π	178	-1,000	0,000	-178,000	0,000	212,1
Август	$7\pi/6$	144	-0,866	-0,500	-124,708	-72,000	158,3
Сентябрь	$4\pi/3$	86	-0,500	-0,866	-43,000	-74,4782	96,6
Октябрь	$3\pi/2$	52	0,000	-1,000	0,000	-52,000	43,7
Ноябрь	$5\pi/3$	38	0,500	-0,866	19,000	-32,909	13,6
Декабрь	$11\pi/6$	37	0,866	-0,500	32,043	-18,500	14,4
Всего		1548			-498,308	511,889	1548

Используя результаты из расчетной таблицы, вычислим параметры уравнения:

$$a_0 = \frac{1548}{12} = 129;$$

$$a_1 = \frac{2\sum y \cos t}{n} = \frac{2 \cdot (-498,308)}{12} = -83,05;$$

$$b_1 = \frac{2\sum y \sin t}{n} = \frac{2 \cdot 511,889}{12} = 85,31.$$

Отсюда получаем уравнение первой гармоники:

$$\hat{y}_{1t} = a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t = 129 - 83,05 \cos t + 85,31 \sin t.$$

Полученные теоретические значения (последняя графа табл. 6.2) заметно отличаются от исходного ряда. Это наблюдение подтверждается графическим изображением обоих рядов (рис. 6.4). Построим вторую гармонику (табл. 6.3).

$$a_2 = \frac{2\sum y \cos 2t}{n} = \frac{2 \cdot (-104,5)}{12} = -17,42,$$

$$b_2 = \frac{2\sum y \sin 2t}{n} = \frac{2 \cdot (-163,68)}{12} = -27,28.$$

Таблица 6.3

Расчет параметров второй гармоники

Месяц	t	y	$\cos 2t$	$\sin 2t$	$y \cdot \cos 2t$	$y \cdot \sin 2t$	\hat{y}_{2t}
Январь	0	39	1,0	0,000	39,0	0,00	28,5
Февраль	$\pi/6$	62	0,5	0,866	31,0	53,69	67,4
Март	$\pi/3$	125	-0,5	0,866	-62,5	108,25	146,4
Апрель	$\pi/2$	256	-1,0	0,000	-256,0	0,00	231,7
Май	$2\pi/3$	276	-0,5	-0,866	-138,0	-239,02	276,7
Июнь	$5\pi/6$	255	0,5	-0,866	127,5	-220,84	258,5
Июль	π	178	1,0	0,000	178,0	0,00	194,6
Август	$7\pi/6$	144	0,5	0,866	72,0	124,71	125,9
Сентябрь	$4\pi/3$	86	-0,5	0,866	-43,0	74,48	81,7
Октябрь	$3\pi/2$	52	-1,0	0,000	-52,0	0,00	61,1
Ноябрь	$5\pi/3$	38	-0,5	-0,866	-19,0	-32,91	45,9
Декабрь	$11\pi/6$	37	0,5	-0,866	18,5	-32,04	29,3
Всего		1548			-104,5	-163,68	1548,0

Уравнение второй гармоники принимает следующий вид:

$$\hat{y}_{2t} = 129 - 83,05 \cos t + 85,31 \sin t - 17,42 \cos 2t - 27,28 \sin 2t.$$

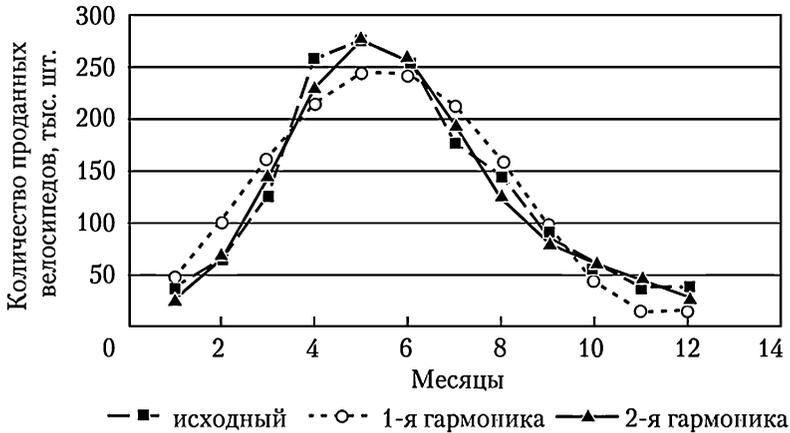


Рис. 6.4. Выравнивание по ряду Фурье

Для определения гармоник, которая точнее отражает исходный ряд, рассчитывают суммы квадратов отклонений выровненных значений от фактических. В нашем примере:

$$1) \sum (y - \hat{y}_{1t})^2 = 8311,2; \quad 2) \sum (y - \hat{y}_{2t})^2 = 2026,0.$$

Следовательно, вторая гармоника более точно отражает исходный ряд. Этот вывод подтверждается графическим изображением в одной системе координат исходного ряда и первой и второй гармоник (см. рис. 6.4).

6.3. Оценка сезонных колебаний за ряд лет

Более надежная оценка сезонности получается, когда анализируют данные за несколько лет. В этом случае индексы сезонности рассчитывают, задавая отношение среднего уровня за каждый месяц и среднемесячного уровня за весь анализируемый период.

Если уровни ряда растут или снижаются, т.е. наблюдается тенденция к увеличению (уменьшению) уровней ряда от года к году, то расчет индексов сезонности осуществляется иначе. Необходимо учесть и изменения внутригодовые (сезонные), и изменения, связанные с направлением тренда. Сначала производится выравнивание исходного динамического ряда по выбранному уравнению. Через соотношение фактических уровней и уровней, выровненных по уравнению тренда, получают индексы сезонности для каждого месяца анализируемого периода. Затем по одноименным месяцам из полученных индексов рассчитывают средний индекс сезонности, произведение которого на теоретическое значение уровня дает выровненное значение показателя с учетом сезонности.

Рассмотрим в качестве примера квартальные изменения производства электроэнергии в РФ (табл. 6.4).

Таблица 6.4

Динамика производства электроэнергии в РФ, млрд кВт·ч

Год	Квартал	Производство электроэнергии, млрд кВт·ч
2010	I	290
	II	231
	III	230
	IV	286
2011	I	292
	II	236
	III	235
	IV	289
2012	I	301
	II	240
	III	232
	IV	291

Из представленных в табл. 6.4 данных видно наличие сезонных колебаний: в I и IV кварталах производство электроэнергии увеличивается, во II и в III – снижается. Построив линейную диаграмму с увеличенным масштабом (рис. 6.5), можно предположить наличие небольшой тенденции к увеличению данного показателя от года к году.

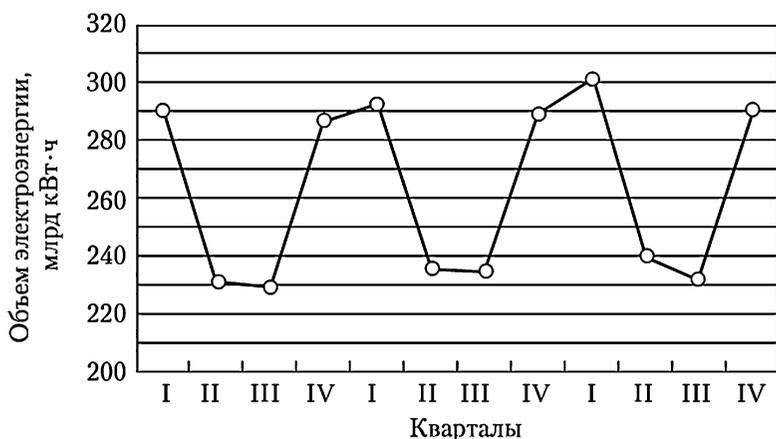


Рис. 6.5. Производство электроэнергии в РФ в 2010–2012 гг.

Это предположение подтверждают и рассчитанные среднеквартальные размеры производства за 2010, 2011 и 2012 гг.: 259, 263, 266 млрд кВт·ч соответственно. Поэтому прежде чем рассчитывать индексы сезонности, произведем выравнивание данного динамического ряда по уравнению прямой. Промежуточные расчеты представлены в табл. 6.5.

Таблица 6.5

Расчетная таблица выравненных значений производства электроэнергии с учетом сезонных колебаний

Год	Квартал	y_i	t_i	t_i^2	$t_i y_i$	\hat{y}_i	I_c	\bar{I}_c	\hat{y}_i
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2010	I	290	1	1	290	259,78	111,6	112,4	291,9
	II	231	2	4	462	260,32	88,7	89,8	233,7
	III	230	3	9	690	260,86	88,2	88,3	230,4
	IV	286	4	16	1144	261,40	109,4	109,5	286,3
2011	I	292	5	25	1460	261,94	111,5	112,4	294,3
	II	236	6	36	1416	262,48	89,9	89,8	235,7
	III	235	7	49	1645	263,02	89,3	88,3	232,2
2012	IV	289	8	64	2312	263,56	109,7	109,5	288,6
	I	301	9	81	2709	264,10	114,0	112,4	296,8
	II	240	10	100	2400	264,64	90,7	89,8	237,6
	III	232	11	121	2552	265,18	87,5	88,3	234,2
	IV	291	12	144	3492	265,72	109,5	109,5	291,0
Всего		3153	78	650	20 572	3153,00	—	—	3152,8

Для вычисления параметров уравнения прямой необходимо решить следующую систему нормальных уравнений:

$$\begin{cases} 12a + 78b = 3153, \\ 78a + 650b = 20572. \end{cases}$$

Получаем $a = 259,24$; $b = 0,54$. Значит, уравнение прямой: $\hat{y}_i = 259,24 + 0,54t_i$. Выравненные значения по уравнению прямой представлены в гр. 7 табл. 6.5. Затем в гр. 8 рассчитаны индексы сезонности как соотношение фактических и теоретических уровней. Следующим этапом рассчитываются средние индексы сезонности для каждого квартала из трех значений этого показателя за три года (гр. 9 табл. 6.5). И наконец, теоретические значения, полученные по уравнению прямой, корректируются с помощью соответствующего среднего индекса сезонности. Окончательный

вариант выравненных значений по уравнению прямой с учетом сезонных колебаний и исходные значения динамического ряда представлены на рис. 6.6.

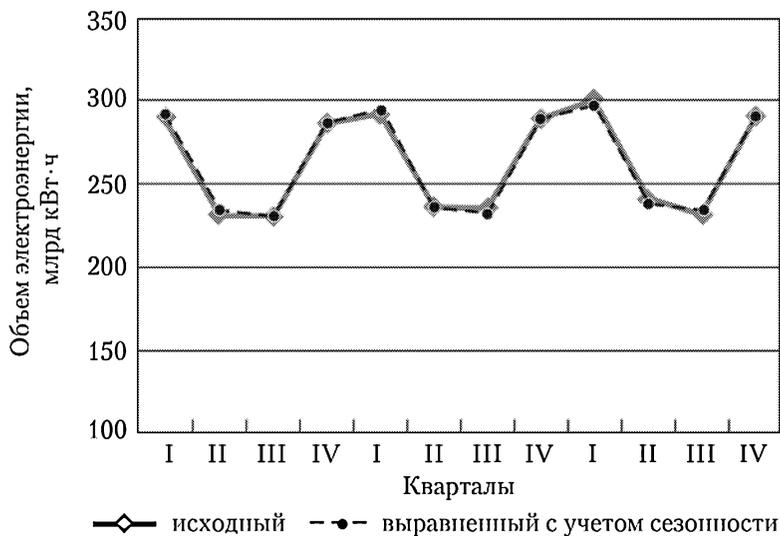


Рис. 6.6. Производство электроэнергии в РФ в 2010–2012 гг.

Силу сезонных колебаний можно оценить, рассчитав коэффициент сезонности через среднюю или относительно выравненных значений по уравнению прямой.

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{n}} = \sqrt{\frac{10118,25}{12}} = 29,04;$$

$$V_c = \frac{\sigma_c}{\bar{y}} \cdot 100\% = \frac{29,04}{262,75} \cdot 100\% = 11\%.$$

Коэффициент сезонности составил 11%, что подтверждает наличие сезонных колебаний производства электроэнергии по кварталам года средней степени.

Тема 7

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ НА ОСНОВЕ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

7.1. Упрощенные приемы прогнозирования

Изучение временных изменений чаще всего производится для оценки состояния этого явления в будущем. Продление динамического ряда, т.е. прогнозирование его значений (экстраполяция), базируется на предположении неизменности тенденции развития изучаемого явления. Экстраполяция может осуществляться различными способами.

Наиболее простым является подход на основе средних показателей динамики. Если абсолютные изменения примерно одинаковы от года к году, то суммирование среднегодового абсолютного изменения и последнего уровня ряда может дать прогнозируемое значение на следующий год:

$$\hat{y}_i = y_{i-1} + \bar{\Delta}.$$

Если более или менее постоянны коэффициенты изменения (роста/сокращения), то умножение последнего уровня ряда на средний коэффициент изменения позволяет определить прогнозируемое значение на следующий год:

$$\hat{y}_i = y_{i-1} \bar{k}.$$

В качестве примера используем временной ряд из подтемы 5.1 общей площади жилища в среднем на одного жителя РФ, в котором ежегодный прирост примерно одинаков и составляет 0,3 м². Тогда прогнозируемое значение показателя на 2012 г. может быть рассчитано следующим образом:

$$\hat{y}_{2012} = y_{2011} + \bar{\Delta} = 23,3 + 0,3 = 23,6 \text{ м}^2/\text{человека}.$$

В подтеме был представлен пример динамики экспорта РФ за 2002–2008 гг., средний коэффициент роста за этот период составил 1,279. Тогда прогнозируемое значение экспорта РФ на 2009 г. может быть рассчитано следующим образом:

$$\hat{y}_{2009} = y_{2008} \bar{k} = 468,1 \cdot 1,279 = 598,7 \text{ млрд долл. США}.$$

Данные подходы могут применяться в условиях *более или менее* стабильных изменений. При достаточно простых вычислениях они могут давать вполне удовлетворительные прогнозируемые значения. На практике стабильный рост или стабильное снижение значений показателя с течением времени встречаются редко, поэтому прогнозирование требует более взвешенных и сложных подходов.

7.2. Прогнозирование на основе экстраполяции тренда

Наиболее обоснованный подход — использование динамических (трендовых) моделей. Сама построенная модель дает оценку тенденции изменения показателя за исследуемый период времени. Предполагая, что эта тенденция сохранится в будущем, полученная трендовая модель используется для расчета прогнозируемого значения. Следует обратить внимание на то, что при прогнозировании предпочтение отдается простым моделям, содержащим меньшее количество параметров. Чаще всего используется линейный тренд. Заметим, что получаемое точечное значение вряд ли будет достигнуто в точности, поскольку фактические уровни, как правило, не совпадают с трендом, а колеблются около него. Именно поэтому прогноз может даваться с учетом этих колебаний: в интервале от прогнозируемого значения минус точность модели до прогнозируемого значения плюс точность модели. Такой прогноз учитывает и направление тренда, и колеблемость уровней вокруг него.

Рассмотрим процедуру выполнения прогноза на примере урожайности зерновых в РФ (табл. 7.1).

Таблица 7.1

Расчет линейного тренда урожайности зерновых

Год	y_i	t_i	\hat{y}_i	$(y_i - \hat{y}_i)^2$
1	2	3	4	5
2000	15,6	1	17,4	3,3
2001	19,4	2	17,8	2,5
2002	19,6	3	18,2	2,0
2003	17,8	4	18,6	0,6
2004	18,8	5	19,0	0,0
2005	18,5	6	19,4	0,8
2006	18,9	7	19,8	0,8
2007	19,8	8	20,2	0,1
2008	23,8	9	20,6	10,5

Год	y_i	t_i	\hat{y}_i	$(y_i - \hat{y}_i)^2$
2009	22,7	10	21,0	3,0
2010	18,3	11	21,4	9,3
Всего	213,2		213,2	33,0

Сначала на основе данного динамического ряда (см. табл. 7.1) рассчитаем параметры линейного уравнения. В результате вычислений получим уравнение прямой: $\hat{y}_i = 17,015 + 0,3945t_i$. Затем рассчитаем теоретические значения урожайности зерновых (гр. 4 табл. 7.1), квадраты их отклонений от фактических значений (гр. 5 табл. 7.1) и среднее квадратическое отклонение фактических значений от теоретических (точность модел):

$$\sigma_t = \sqrt{\frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{n - p}} = \sqrt{\frac{33}{11 - 2}} = 1,91.$$

Точечное прогнозируемое значение урожайности зерновых на 2011 г. составит

$$\hat{y}_{2011} = 17,015 + 0,3945 \cdot 12 = 21,749 \approx 21,75 \text{ ц/га.}$$

Прогнозируемый диапазон с учетом точности модели:

$$\hat{y}_{2011} - \sigma_{y(t)} \leq \hat{y}_{\text{прогн}} \leq \hat{y}_{2011} + \sigma_{y(t)};$$

$$21,75 - 1,91 \leq \hat{y}_{\text{прогн}} \leq 21,75 + 1,91;$$

$$19,84 \leq \hat{y}_{\text{прогн}} \leq 23,66.$$

Таким образом, урожайность зерновых в РФ в 2011 г. составит значение из интервала от 19,84 до 23,66 ц/га.

Существенное влияние на достоверность прогноза оказывает длина исходного временного ряда, на основе которого строится прогноз, а также удаленность прогнозируемого года от исходного ряда. Как правило, прогноз рассчитывается на длину, не превышающую трети длины исходного ряда. Для более точного прогноза, учитывающего не только колеблемость значений около тренда, но и его длину, и расстояние до прогнозируемого года, рассчитывается средняя ошибка прогноза положения линейного тренда:

$$m_{\hat{y}_k} = \sigma_t \cdot \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{t_k^2}{\sum t_i^2}},$$

где σ_t — среднее квадратическое отклонение; n — количество уровней ряда; t_k — номер года прогноза.

Учитывая, что исследование выборочное, через определение предельной ошибки рассчитываются доверительные границы прогноза с заданной вероятностью и с учетом числа степеней свободы. Для этого находят значение t -критерия по таблице Стьюдента. Затем рассчитывают предельную с заданной вероятностью ошибку:

$$\Delta_{\hat{y}_k} = m_{\hat{y}_k} t.$$

Таким образом, доверительный интервал прогноза с заданной вероятностью будет от $(\hat{y}_k - \Delta_{\hat{y}_k})$ до $(\hat{y}_k + \Delta_{\hat{y}_k})$.

В рассмотренном примере доверительный интервал прогноза урожайности зерновых в РФ в 2011 г. вычисляется следующим образом:

1) средняя ошибка прогноза положения линейного тренда

$$m_{y_k} = \sigma_t \cdot \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{t_k^2}{\sum t_i^2}} = 1,91 \cdot \sqrt{\frac{1}{11} + \frac{12^2}{506}} = 1,1651;$$

2) значение t -критерия Стьюдента при девяти степенях свободы $9 (11 - 2)$ и $0,05$ уровне значимости составляет $2,262$;

3) предельная ошибка отсюда

$$\Delta_{\hat{y}_k} = m_{\hat{y}_k} t = 1,1651 \cdot 2,262 = 2,6354 \approx 2,64;$$

4) значит, доверительный интервал прогноза показателя следующий:

$$19,11 \leq \hat{y}_{\text{прогн}} \leq 24,39.$$

Таким образом, с вероятностью $0,95$ можно утверждать, что урожайность зерновых в РФ в 2011 г. будет составлять значение из интервала от $19,11$ до $24,39$ ц/га, если тенденция динамики данного показателя останется неизменной. Фактически урожайность зерновых в 2011 г. составила $22,4$ ц/га, что входит в рассчитанный доверительный интервал прогноза.

Чем удаленнее прогнозируемый уровень от последнего известного значения динамического ряда, тем менее точным становится прогноз, рамки доверительного интервала раздвигаются. Если на основе того же временного ряда рассчитать доверительный интервал прогноза урожайности на 2012 г., то будет получен следующий диапазон:

$$\hat{y}_{2012} = 17,015 + 0,3945 \cdot 13 = 22,14 \text{ ц/га};$$

$$m_{\hat{y}_k} = \sigma_t \cdot \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{t_k^2}{\sum t_i^2}} = 1,91 \cdot \sqrt{\frac{1}{11} + \frac{13^2}{506}} = 1,2415;$$

$$\Delta_{\hat{y}_k} = m_{\hat{y}_k} t = 1,2415 \cdot 2,262 = 2,808273 \approx 2,81;$$

$$19,33 \leq \hat{y}_{\text{прогн}} \leq 24,95.$$

Как очевидно из расчетов, ошибка прогноза увеличивается и доверительный интервал становится шире. С вероятностью 0,95 можно утверждать, что урожайность зерновых в РФ в 2012 г. будет составлять значение из интервала от 19,33 до 24,95 ц/га, если тенденция динамики данного показателя останется неизменной. Однако этот прогноз не оправдался. 2012 г. оказался неблагоприятным с точки зрения погодных условий, фактическая урожайность зерновых составила 18,3 ц/га, что является одним из самых низких значений показателя за весь рассмотренный период.

7.3. Прогнозирование с учетом сезонной составляющей

Как уже было сказано выше, при выявлении периодических, в том числе сезонных, колебаний одной из основных задач исследователя становится анализ этих колебаний и прогнозирование значений показателя с их учетом. Основой для прогнозирования должны служить данные за несколько лет. В случае отсутствия тенденции к росту или снижению показателя от года к году ориентировочными значениями для прогноза могут служить средние значения за идентичные кварталы или месяцы.

На практике, как правило, наблюдается изменения показателей от года к году. Отсюда возникает необходимость аналитического выравнивания исходного динамического ряда и включения в теоретические значения фактора сезонности. Техника этих вычислений представлена в подтеме 6.3. Подход к расчету прогнозируемых значений аналогичен экстраполяции по любой трендовой модели. Особенностью является корректировка значений, полученных по уравнению, на соответствующие индексы сезонности.

Воспользуемся данными табл. 6.5 и рассчитаем прогнозируемые поквартальные значения производства электроэнергии в РФ в 2013 г. Для этого сначала подставляя в полученное уравнение номер интересующего квартала, получают теоретическое значение, а затем умножением на средний индекс сезонности соответствующего квартала (гр. 9 табл. 6.5) итоговое значение прогнозируемого показателя.

$$\hat{y}_{1/13} = (259,24 + 0,54 \cdot 13) \cdot 1,124 = 299,3 \text{ млрд кВт} \cdot \text{ч};$$

$$\hat{y}_{2/13} = (259,24 + 0,54 \cdot 14) \cdot 0,898 = 239,6 \text{ млрд кВт} \cdot \text{ч};$$

$$\hat{y}_{3/13} = (259,24 + 0,54 \cdot 15) \cdot 0,883 = 236,1 \text{ млрд кВт} \cdot \text{ч};$$

$$\hat{y}_{4/13} = (259,24 + 0,54 \cdot 16) \cdot 1,095 = 293,3 \text{ млрд кВт} \cdot \text{ч}.$$

Полученные поквартальные значения учитывают сезонные колебания присущие данному показателю и тенденцию к его увеличению, выявленную за предыдущие годы.

Выводы

- Изучение временных изменений является одним из основных разделов статистики. Это изучение может сводиться к построению временного ряда в виде таблицы или графика и его визуальному анализу, что, безусловно, не даст подробной картины происходящего, но позволит составить общее представление об изменении данного показателя в изучаемый промежуток времени.

- Для получения более детальной картины используют различные показатели динамики, расчет которых основан на сопоставлении уровней временного ряда между собой, и средние из них. В этом случае можно дать оценку общего изменения показателя за исследуемый промежуток времени, а также выделить периоды увеличения и снижения показателя, измерить величину изменений, возможно, дать характеристику средних изменений данного показателя в единицу времени.

- Более серьезным анализом динамики является разделение имеющихся временных изменений на те, что обусловлены основополагающими причинами, периодическими воздействиями и случайными факторами. Статистика предлагает много различных методов для осуществления такого анализа. Следует обратить внимание на то, что независимо от уровня используемого математического аппарата важно помнить о содержательной части анализа, т.е. любые вычисления должны предварять теоретический анализ самого показателя, явления, которое он характеризует, и не исчезать до получения окончательных выводов.

- Особый интерес к изучению динамики часто обусловлен возможностью сделать какие-либо прогнозы. Конечно, опираясь на серьезный анализ изменений показателя за длительный временной интервал, осуществляются расчеты прогнозируемых значений, что имеет большую востребованность, к какой бы сфере ни относились изучаемые показатели.

Вопросы и задания для обсуждения

1. Какой длительности должен быть временной ряд?
2. Опишите виды графиков для отражения временных изменений и возможные ошибки при их построении.
3. Какова роль периодизации при изучении временных изменений?
4. Какие дополнительные аналитические возможности дает изучение двух и более динамических рядов?
5. Охарактеризуйте средние величины в динамике: необходимость и ограничения применения.
6. Опишите особенности изучения динамики абсолютных, относительных и средних величин.
7. Какие факторы необходимо учитывать при выборе трендовой модели?
8. В каких случаях при изучении динамики имеет значение измерение сезонности? Какие приемы для этого используются?
9. Выделите специфические черты динамики стоимостных показателей.
10. Охарактеризуйте особенности временных изменений структурных характеристик.

Задания для самостоятельной работы

Задание 1

Потребление основных продуктов питания населением Российской Федерации на душу населения в год характеризуется следующими данными.

Показатель	Год									
	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	
Мясо и мясопродукты в пересчете на мясо, кг	61	61	64	67	71	75	73	79	81	
Молоко и молочные продукты в пересчете на молоко, кг	225	227	244	244	246	247	256	262	263	
Яйца, шт.	208	202	209	206	204	203	211	221	217	
Рыба и рыбопродукты, кг	14	15	17	17	18	20	20	21	21	
Сахар, кг	26	26	34	32	32	32	31	33	32	
Масло растительное, кг	10	10	11	11	11	11	11	11	11	
Картофель, кг	86	86	78	73	72	67	67	66	63	
Овощи, кг	84	86	90	88	89	89	95	96	98	
Фрукты и ягоды, кг	36	39	51	53	58	62	64	70	71	
Хлебные продукты, кг	109	106	113	107	104	101	99	101	99	

Определите показатели динамики (цепные и базисные) потребления каждого вида продуктов питания населением Российской Федерации. Сопоставьте приведенные ряды динамики, используя среднегодовые показатели динамики.

Задание 2

Имеются следующие данные о числе лесных пожаров в РФ.

Годы	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Всего, тыс. ед.	22,4	23,7	43,4	33,1	27,2	19,2	32,5
Годы	2007	2008	2009	2010	2011	2012	
Всего, тыс. ед.	17,8	26,3	23,2	34,8	21,1	20,2	

Определите показатели динамики от года к году по сравнению с 2000 г. и средние за весь анализируемый период, а также средний уровень ряда. Сформулируйте выводы.

Задание 3

Объем товарных запасов на складе предприятия в текущем году зафиксирован на 1 января на сумму 1300 тыс. руб., на 1 февраля — 1260 тыс. руб., на 1 марта — 1230 тыс. руб., на 1 апреля — 1370 тыс. руб., на 1 июля — 1410 тыс. руб. Известно, что выпуск готовой продукции в январе составил 2640 тыс. руб., в феврале — 3250 тыс. руб., в марте — 3380 тыс. руб., в целом за I полугодие выпущено продукции на 19 020 тыс. руб.

Определите средний объем запасов на складе и средний объем выпущенной продукции предприятием в I и II кварталах, а также в I полугодии.

Задание 4

Имеются следующие данные о вводе в действие объектов культуры в Российской Федерации.

Показатель	Год						
	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Учреждения культуры клубного типа — всего, тыс. мест	12,1	13,0	10,4	9,0	9,8	12,6	12,9
В том числе в сельской местности	9,6	9,9	7,7	6,4	5,9	5,7	8,6

Показатель	Год					
	2007	2008	2009	2010	2011	2012
Учреждения культуры клубного типа — всего, тыс. мест	12,3	8,4	11,2	13,4	8,7	17,4
В том числе в сельской местности	5,2	4,8	3,6	9,0	6,1	16,4

Сделайте выравнивание каждого динамического ряда (метод укрупненных интервалов, скользящей средней, апалитическое), рассчитайте доверительные границы прогноза на 2013 г. и постройте графики исходных и выравненных динамических рядов.

Задание 5

Имеются следующие данные о жилищных условиях населения РФ (на конец года).

	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Общая площадь жилых помещений, приходящаяся в среднем на одного жителя — всего, м ²	19,2	19,5	19,8	20,1	20,4	20,8	21,0
Из них:							
в городской местности	18,9	19,2	19,5	19,8	20,2	20,4	20,7
в сельской местности	19,9	20,3	20,7	21,1	21,2	21,9	22,0

	2007	2008	2009	2010	2011	2012
Общая площадь жилых помещений, приходящаяся в среднем на одного жителя — всего, м ²	21,4	21,8	22,2	22,6	23,0	23,4
Из них:						
в городской местности	21,1	21,4	21,8	22,1	22,5	22,9
в сельской местности	22,5	22,9	23,4	24,0	24,5	24,8

Проведите анализ динамического ряда с целью выявления тенденции изменения имеющихся показателей:

- 1) постройте линейный график исходного динамического ряда;
- 2) рассчитайте параметры тренда;
- 3) сделайте прогноз на 2013 г. (разными способами).

Вариант 1: показатель — общая площадь жилых помещений, приходящаяся в среднем на одного жителя.

Вариант 2: показатель — общая площадь жилых помещений, приходящаяся в среднем на одного жителя в городской местности.

Вариант 3: показатель — общая площадь жилых помещений, приходящаяся в среднем на одного жителя в сельской местности.

Задание 6

Имеются следующие данные об образовательных учреждениях РФ.

Учебный год	Высшее профессиональное образование			Среднее профессиональное образование		
	Число образовательных учреждений	В них студентов, тыс. человек	На 10 000 человек населения приходится студентов	Число образовательных учреждений	В них студентов, тыс. человек	На 10 000 человек населения приходится студентов
2005/06	1068	7064,6	493	2905	2590,7	181
2006/07	1090	7309,8	512	2847	2514,0	176
2007/08	1108	7461,3	523	2799	2408,2	169
2008/09	1134	7513,1	526	2784	2244,1	157
2009/10	1114	7418,8	519	2866	2142,1	150
2010/11	1115	7049,8	493	2850	2125,7	149
2011/12	1080	6490,0	454	2925	2081,7	146
2012/13	1046	6073,9	—	2981	2087,1	—

1. Рассчитайте средние уровни и средние показатели динамики по имеющимся динамическим рядам.

2. Сравните полученные в п. 1 результаты по аналогичным показателям, характеризующим динамику по высшим и средним образовательным учреждениям.

3. Рассчитайте относительные цепные показатели по всем имеющимся динамическим рядам, дайте их графическое изображение.

4. Вычислите коэффициенты опережения по динамическим рядам «число студентов на 10 000 человек населения» для высших и средних образовательных учреждений.

5. Сформулируйте выводы.

Задание 7

Имеются следующие данные об образовательных учреждениях РФ (представлены в таблице).

1. Сравните динамику удельного веса государственных и муниципальных образовательных учреждений высшего профессионального образования по их количеству и численности студентов в общем объеме данных показателей по РФ.

2. Сравните динамику удельного веса государственных и муниципальных образовательных учреждений среднего профессионального образования по их количеству и численности студентов в общем объеме данных показателей по РФ.

3. Сравните динамику удельного веса негосударственных образовательных учреждений высшего профессионального образования по их количеству и численности студентов в общем объеме данных показателей по РФ.

4. Сравните динамику удельного веса негосударственных образовательных учреждений среднего профессионального образования по их количеству и численности студентов в общем объеме данных показателей по РФ.

5. Сравните динамику доли государственных и муниципальных учреждений высшего образования и доли государственных и муниципальных учреждений среднего профессионального образования.

6. Сравните динамику доли численности студентов государственных и муниципальных учреждений высшего образования и доли численности студентов государственных и муниципальных учреждений среднего профессионального образования.

7. Сформулируйте выводы.

Задание 8

На основе данных задания 2 произведите выравнивание динамического ряда, используя различные уравнения. Сравните полученные модели. Представьте графическое изображение исходного динамического ряда и выбранной вами модели.

Учебный год	Высшее профессиональное образование					Среднее профессиональное образование						
	Число уч- реж- дений	В том числе		Числен- ность студен- тов	В том числе		Число учрежде- ний	В том числе		Числен- ность студен- тов	В том числе	
		государ- ственные и муниципальные	негосудар- ственные		государ- ственные и муниципальные	негосудар- ственные		государ- ственные и муниципальные	негосудар- ственные		государ- ственные и муниципальные	
2005/ 2006	1068	655	413	7064,6	5985,3	1079,3	2905	2688	217	2590,7	2473,0	117,7
2006/ 2007	1090	660	430	7309,8	6133,1	1176,8	2847	2631	216	2514,0	2388,9	125,2
2007/ 2008	1108	658	450	7461,3	6208,4	1252,9	2799	2566	233	2408,2	2288,5	119,7
2008/ 2009	1134	660	474	7513,1	6214,8	1298,3	2784	2535	249	2244,1	2136,1	108,0
2009/ 2010	1114	662	452	7418,8	6135,6	1283,3	2866	2564	302	2142,1	2052,3	89,8
2010/ 2011	1115	653	462	7049,8	5848,7	1201,1	2850	2586	264	2125,7	2026,8	98,9
2011/ 2012	1080	634	446	6490,0	5453,9	1036,1	2925	2665	260	2081,7	1984,0	97,7
2012/ 2013	1046	609	437	6073,9	5143,8	930,1	2981	2725	256	2087,1	1984,4	102,7

Используемые обозначения и основные формулы

Используемые обозначения

- y_i — i -й уровень ряда динамики, $i = 1, 2, \dots, n$;
 n — количество уровней ряда;
 t_i — i -й момент или период времени;
 Δ — абсолютное изменение (прирост/снижение);
 k — коэффициент изменения (роста/сокращения);
 T — темп изменения (роста/сокращения);
 $T_{\text{пр}}$ — темп прироста/снижения;
 $A_{1\%}$ — абсолютное значение (содержание) 1% прироста;
 \bar{y} — средний уровень ряда;
 \hat{y}_i — выравненный i -й уровень ряда;
 p — число параметров уравнения;
 \bar{l}_t — среднее линейное отклонение в динамическом ряду;
 σ_t — среднее квадратическое отклонение в динамическом ряду;
 $\bar{y}_{\text{благ}}$ — средняя величина из уровней за благоприятные периоды;
 $\bar{y}_{\text{неблаг}}$ — средняя величина из уровней за неблагоприятные периоды.

Основные формулы

Средняя хронологическая

$$\bar{y} = \frac{\frac{y_1}{2} + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}}{n-1}.$$

Средняя арифметическая простая

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}.$$

Средняя арифметическая взвешенная

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i t_i}{\sum t_i}.$$

Абсолютное изменение (скорость роста или снижения)

$$\Delta_{\text{цепное}} = y_i - y_{i-1};$$

$$\Delta_{\text{базисное}} = y_i - y_1.$$

Ускорение

$$\Delta_{\Delta} = \Delta_i - \Delta_{i-1}.$$

Коэффициент изменения (роста или сокращения)

$$k_{\text{цепной}} = \frac{y_i}{y_{i-1}};$$

$$k_{\text{базисный}} = \frac{y_i}{y_1}.$$

Темп изменения (роста или сокращения)

$$T_{\text{цепное}} = \frac{y_i}{y_{i-1}} \cdot 100\%;$$

$$T_{\text{базисное}} = \frac{y_i}{y_1} \cdot 100\%.$$

Темп прироста

$$T_{\text{пр}} = k \cdot 100 - 100 = T - 100 \cdot 1;$$

$$T_{\text{пр}} = \frac{\Delta}{y_1} \cdot 100\% = T - 100\%.$$

Абсолютное значение (содержание) 1% прироста

$$A_{1\%} = \frac{\Delta}{T_{\text{пр}}};$$

$$A_{1\%} = \frac{\Delta}{T_{\text{пр}}} = \frac{y_i - y_{i-1}}{\frac{y_i - y_{i-1}}{y_{i-1}} \cdot 100\%} = \frac{y_{i-1}}{100\%}.$$

Среднее абсолютное изменение (или средняя скорость изменения)

$$\bar{\Delta} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \Delta_i}{n-1} = \frac{y_n - y_1}{n-1}.$$

Средний коэффициент изменения

$$\bar{k} = \sqrt[n]{k_1 k_2 \dots k_{n-1}} = \sqrt[n]{\frac{y_n}{y_1}}.$$

Средний темп прироста

$$\bar{T}_{\text{пр}} = \bar{k} \cdot 100 - 100\% = \bar{T} - 100\%.$$

Уравнения для построения трендовых моделей

1) прямая $\hat{y}_i = a + bt_i$;

2) парабола 2-го порядка $\hat{y}_i = a + bt_i + ct_i^2$;

3) показательная функция $\hat{y}_i = a \cdot b^t$ (экспонента);

4) гипербола $\hat{y}_i = a + \frac{b}{t_i}$;

5) ряд Фурье $y_t = a_0 + \sum_{k=1}^m (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$.

Размах колеблемости средних уровней

$$R = \bar{y}_{\text{благ}} - \bar{y}_{\text{неблаг}}.$$

Индекс устойчивости уровней динамического ряда

$$i_{\bar{y}} = \frac{\bar{y}_{\text{благ}}}{\bar{y}_{\text{неблаг}}}.$$

Среднее линейное отклонение фактических уровней от уровней выравненного ряда

$$\bar{l}_t = \frac{\sum |y_i - \hat{y}_i|}{n - p}.$$

Среднее квадратическое отклонение фактических уровней от уровней выравненного ряда

$$\sigma_t = \sqrt{\frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{n - p}}.$$

Коэффициент линейной колеблемости

$$V_{\bar{y}} = \frac{\bar{l}_t}{\bar{y}} \cdot 100\%.$$

Коэффициент колеблемости

$$V_{\sigma} = \frac{\sigma_t}{\bar{y}} \cdot 100\%.$$

Коэффициент устойчивости

$$K_{уст} = 100 - V_{\sigma}.$$

Коэффициент рангов Спирмена

$$\rho = 1 - \frac{6\sum\Delta^2}{n^3 - n}.$$

Индекс корреляции

$$I_r = \sqrt{1 - \frac{\sum(y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum(y_i - \bar{y})^2}}.$$

Абсолютные отклонения ежемесячных уровней от среднемесячного уровня за год

$$\Delta_i = y_i - \bar{y}.$$

Индекс сезонности

$$i_i = \frac{y_i}{\bar{y}} \cdot 100\%.$$

Коэффициент сезонности:

$$V_c = \frac{\sigma_c}{\bar{y}} \cdot 100\%, \text{ где } \sigma_c = \sqrt{\frac{\sum(y_i - \bar{y})^2}{n}}.$$

Средняя ошибка прогноза положения тренда

$$m_{y_k} = \sigma_t \cdot \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{t_k^2}{\sum t_i^2}}.$$

Список литературы

1. *Агапова, Т. Н.* Методы статистического изучения структуры сложных систем и ее изменения / Т. Н. Агапова. — Москва : Финансы и статистика, 1996.
2. *Афанасьев, В. Н.* Анализ временных рядов и прогнозирование : учебник / В. Н. Афанасьев, М. М. Юзбашев. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Финансы и статистика, 2010.
3. *Васильева, Э. К.* Статистика : учебник / Э. К. Васильева, В. С. Лялин. — Москва : ЮНИТИ-ДАНА, 2012.
4. Долгова, В. Н. Статистика : учебник и практикум для вузов / В. Н. Долгова, Т. Ю. Медведева. — 3-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2023.
5. Долгова, В. Н. Теория статистики : учебник и практикум для вузов / В. Н. Долгова, Т. Ю. Медведева. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2023.
6. *Дружинин, Н. К.* Выборочное наблюдение и эксперимент (общие логические принципы организации) / Н. К. Дружинин. — Москва : Статистика, 1977.
7. Дудин, М. Н. Статистика : учебник и практикум для вузов / М. Н. Дудин, Н. В. Лясников, М. Л. Лезина. — Москва : Издательство Юрайт, 2023.
8. Дудин, М. Н. Теория статистики : учебник и практикум для вузов / М. Н. Дудин, Н. В. Лясников, М. Л. Лезина. — Москва : Издательство Юрайт, 2023.
9. *Ефимова, М. Р.* Общая теория статистики : учебник / М. Р. Ефимова, Е. В. Петрова, В. Н. Румянцев. — Москва : ИНФРА-М, 2011.
10. *Казинец, Л. С.* Измерение структурных сдвигов в экономике / Л. С. Казинец. — Москва : Экономика, 1969.
11. *Казинец, Л. С.* Темпы роста и структурные сдвиги в экономике / Л. С. Казинец. — Москва : Экономика, 1981.
12. *Кендэл, М.* Временные ряды / М. Кендэл ; перевод с английского и предисловие Ю. П. Лукашина. — Москва : Финансы и статистика, 1981.
13. *Кокрен, У.* Методы выборочного исследования / У. Кокрен ; перевод с английского под редакцией А. Г. Волкова. — Москва : Статистика, 1976.

14. *Митропольский, А. К.* Техника статистических вычислений / А. К. Митропольский. — Москва : Наука, 1971.
15. *Михайлова, Т. М.* Новое в теории статистических показателей и их систем / Т. М. Михайлова. — Санкт-Петербург, 2007.
16. Общая теория статистики: Статистическая методология в изучении коммерческой деятельности : учебник / под редакцией О. Э. Башиной, А. А. Спирина. — Москва : Финансы и статистика, 2007.
17. Общая теория статистики : учебник / под редакцией М. Г. Назарова. — Москва : Омега-Л, 2011.
18. Общая теория статистики. Практикум : учебное пособие для вузов / М. Р. Ефимова, Е. В. Петрова, О. И. Ганченко, М. А. Михайлов ; под редакцией М. Р. Ефимовой. — 4-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2023.
19. Подкорытова, О. А. Анализ временных рядов : учебное пособие для вузов / О. А. Подкорытова, М. В. Соколов. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2023.
20. *Салин, В. Н.* Курс теории статистики для подготовки специалистов финансово-экономического профиля : учебник / В. Н. Салин, Э. Ю. Чурилова. — Москва : Финансы и статистика, 2007.
21. Статистика : учебник / Л. П. Харченко [и др.] ; под редакцией В. Г. Ионина. — Москва : ИНФРА-М, 2010.
22. Статистика : учебник для вузов / И. И. Елисеева [и др.] ; ответственный редактор И. И. Елисеева. — 6-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2023.
23. Статистика : учебник и практикум для вузов / под редакцией И. И. Елисеевой. — 4-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2023.
24. Статистика. В 2 частях. Ч. 1 : учебник и практикум для вузов / В. С. Мхитарян [и др.] ; под редакцией В. С. Мхитаряна. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2023.
25. Статистика. В 2 частях. Ч. 2 : учебник и практикум для вузов / В. С. Мхитарян, Т. Н. Агапова, С. Д. Ильенкова, А. Е. Суринов ; под редакцией В. С. Мхитаряна. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2023.
26. Статистика. Практикум : учебное пособие для вузов / И. И. Елисеева [и др.] ; под редакцией И. И. Елисеевой. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2023.
27. Теория статистики : учебник / под редакцией Г. Л. Громыко. — Москва : ИНФРА-М, 2010.
28. Теория статистики : учебник / Р. А. Шмойлова, В. Г. Минашкин, Н. А. Садовникова, Е. Б. Шувалова ; под редакцией Р. А. Шмойловой. — Москва : Финансы и статистика, 2009.

29. Теория статистики с элементами эконометрики. Практикум : учебное пособие для вузов / В. В. Ковалев [и др.] ; под редакцией В. В. Ковалева. — Москва : Издательство Юрайт, 2023.

30. Теория статистики : учебное пособие для вузов / В. В. Ковалев [и др.] ; под редакцией В. В. Ковалева. — Москва : Издательство Юрайт, 2023.

31. Черткова, Е. А. Статистика. Автоматизация обработки информации : учебное пособие для вузов / Е. А. Черткова. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2023.

32. *Четыркин, Е. М.* Статистические методы прогнозирования / Е. М. Четыркин. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Статистика, 1977.

33. Шимко, П. Д. Теория статистики : учебник и практикум для вузов / П. Д. Шимко. — Москва : Издательство Юрайт, 2023.

Наши книги можно приобрести:

Учебным заведениям и библиотекам:
в отделе по работе с вузами
тел.: (495) 744-00-12, e-mail: vuz@urait.ru

Частным лицам:
список магазинов смотрите на сайте urait.ru
в разделе «Частным лицам»

Магазинам и корпоративным клиентам:
в отделе продаж
тел.: (495) 744-00-12, e-mail: sales@urait.ru

Отзывы об издании присылайте в редакцию
e-mail: gred@urait.ru

**Новые издания и дополнительные материалы доступны
на образовательной платформе «Юрайт» urait.ru,
а также в мобильном приложении «Юрайт.Библиотека»**

Учебное издание

Попова Ирина Николаевна

АНАЛИЗ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Учебник для вузов

Ответственный редактор — *В. В. Ковалев*

Формат 60×90¹/₁₆.
Печать цифровая.
Усл. печ. л. 4,63.

ООО «Издательство Юрайт»
111123, г. Москва, ул. Плеханова, д. 4а.
Тел.: (495) 744-00-12. E-mail: izdat@urait.ru, www.urait.ru